DEVOIR COMMUN N°2

Mars 2026

Mathématiques-Spécialité

Lycée Évariste Galois
Durée de l'épreuve 4 h 00

L'usage de la calculatrice, en mode examen actif ou sans mémoire « type collège », est autorisé.

Exercice 1

5 points/20

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 m d'un médicament.

On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.

On a $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$.

Partie A : En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 ml.

0,25 pt **1** $u_2 = 2 + 0,8u_1 = 2 + 0,8 \times 2 = 2 + 1,6 = 3,6$.

0,75 pt **2** Pour tout entier naturel non nul n, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a : $10 - 8 \times 0,8^{1-1} = 10 - 8 \times 0,8^0 = 10 - 8 \times 1 = 2$ et $u_1 = 2$.

Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.

Hérédité : Soit n entier naturel non nul, on suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain n et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.

On a :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 + 0,8u_n \quad \text{par définition de la suite } (u_n)\\ &= 2 + 0,8\left(10 - 8 \times 0,8^{n-1}\right), \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= 2 + 0,8 \times 10 - 0,8 \times 8 \times 0,8^{n-1}\\ &= 2 + 8 - 8 \times 0,8 \times 0,8^{n-1}\\ &= 10 - 8 \times 0,8 \times 0,8^{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : Selon le principe de récurrence, on déduit que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$.

0,5 pt **3** On a : $-1 < 0,8 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^{n-1} = 0$.

Dès lors, par produit et somme de limites, on obtient : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} -8 \times 0,8^{n-1} = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(10 - 8 \times 0,8^{n-1}\right) = 10. \end{cases}$

Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$.

Cela signifie qu'à long terme, après un nombre conséquent de prises, la quantité du médicament dans l'organisme du patient se stabilisera autour de 10 ml.

0,75 pt **4** **Méthode 1 :** Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 10 - 8 \times 0,8^n - \left(10 - 8 \times 0,8^{n-1}\right)\\ &= 10 - 8 \times 0,8^n - 10 + 8 \times 0,8^{n-1}\\ &= 8 \times 0,8^{n-1} \times (-0,8 + 1)\\ &= 1,6 \times 0,8^{n-1}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$, $1,6 \times 0,8^{n-1} > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.
Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$, $10 - 8 \times 0,8^{n-1} < 10$, soit $u_n < 10$.
La suite (u_n) étant strictement croissante et majorée par 10, l'inéquation $u_N \geqslant 10$ n'admet pas de solution.

Cela signifie que la quantité du médicament reste toujours strictement inférieure à 10 ml, dans l'organisme du patient.

Méthode 2 : Soit N un entier naturel strictement positif. On a :

$$\begin{array}{rcl} u_N \geqslant 10 & \Leftrightarrow & 10 - 8 \times 0,8^{N-1} \geqslant 10 \\ & \Leftrightarrow & -8 \times 0,8^{N-1} \geqslant 0. \end{array}$$

Absurde ! En effet, pour tout $N \geqslant 1$, $0,8^{N-1} > 0$ et donc $-8 \times 0,8^{N-1} < 0$.
En conséquence l'inéquation $u_N \geqslant 10$ n'admet pas de solution.

Cela signifie que la quantité du médicament reste toujours strictement inférieure à 10 ml, dans l'organisme du patient.

0,75 pt **5** Soit n un entier naturel non nul, on a :

$$\begin{array}{rcl} u_n > 9 & \Leftrightarrow & 10 - 8 \times 0,8^{n-1} > 9 \\ & \Leftrightarrow & -8 \times 0,8^{n-1} > -1 \\ & \Leftrightarrow & 0,8^{n-1} < \dfrac{1}{8} \quad \text{l'ordre s'inverse car, } -8 < 0 \\ & \Leftrightarrow & \ln\left(0,8^{n-1}\right) < \ln\left(\dfrac{1}{8}\right) \quad \text{car, la fonction ln est strictement croissante sur }]0;+\infty[\\ & \Leftrightarrow & (n-1)\ln(0,8) < -\ln(8) \quad \text{car, } \ln(a^n) = n\ln(a) \\ & \Leftrightarrow & n - 1 > -\dfrac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \quad \text{car, } \ln(0,8) < 0 \\ & \Leftrightarrow & n > -\dfrac{\ln(8)}{\ln(8) - \ln(10)} + 1 \quad \text{car, } \ln(0,8) = \ln\left(\dfrac{8}{10}\right) = \ln(8) - \ln(10) \\ & \Leftrightarrow & n > \dfrac{\ln(8)}{\ln(10) - \ln(8)} + 1 \\ & \Leftrightarrow & n > \dfrac{\ln(10)}{\ln(10) - \ln(8)}. \end{array}$$

Or, $\dfrac{\ln(10)}{\ln(10) - \ln(8)} \approx 10,31$. Donc, $n \geqslant 11$.

En conséquence, la quantité du médicament dans l'organisme du patient dépasse strictement 9 ml à partir de la 11-ème prise.

Partie B : En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par :

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

0,25 pt **1** Il est assez aisé de faire le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcl} S_2 & = & \dfrac{u_1 + u_2}{2} \\ & = & \dfrac{2 + 3,6}{2} \\ & = & 2,8. \end{array}$$

0,5 pt **2** Soit n un entier naturel non nul. On a :

$$\begin{aligned}
u_1+u_2+\cdots+u_n &= (10-8\times 0,8^0)+(10-8\times 0,8^1)+\cdots+(10-8\times 0,8^{n-1})\\
&= \underbrace{(10+10+\cdots+10)}_{\text{n termes}} -8\times\left(0,8^0+0,8^1+\cdots+0,8^{n-1}\right)\\
&= 10n-8\times 1\times\frac{1-0,8^n}{1-0,8}\quad \text{car, } 1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\\
&= 10n-\frac{8}{0,2}\times\left(1-0,8^n\right)\\
&= 10n-40\times\left(1-0,8^n\right)\\
&= 10n-40+40\times 0,8^n.
\end{aligned}$$

0,5 pt **3** En utilisant la question précédente on obtient, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{10n-40+40\times 0,8^n}{n}\\
&= 10-\frac{40}{n}+\frac{40}{n}\times 0,8^n.
\end{aligned}$$

Or, $-1<0,8<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n=0$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{40}{n}=0$.

Ainsi, par somme et produit de limites, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=10$.

0,25 pt **4** Dans le contexte de l'exercice, la saisie `mystere(9)` renvoie le petit entier naturel n à partir duquel la quantité moyenne de médicament dans l'organisme du malade est supérieure ou égale à 9 ml.

0,5 pt **5** **Raisonnement 1 :** D'après la question 5 de la partie A, on sait que : $u_n>9$ à partir de 11 prises.
Or, la moyenne (S_n) croit moins rapidement que (u_n) :

n	u_n	S_n
1	2	2
2	3,6	2,8
3	4,88	3,49333333
4	5,904	4,096
5	6.7232	4,62144

Donc, pour que la moyenne S_n dépasse 9, il faudra absolument plus de 11 prises.

Raisonnement 2 : On sait que la suite (u_n) est croissante, donc pour tout $n\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\leqslant\frac{u_n+u_n+\cdots+u_n}{n} &\Leftrightarrow \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\leqslant\frac{nu_n}{n}\\
&\Leftrightarrow \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\leqslant u_n\\
&\Leftrightarrow S_n\leqslant u_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, $S_n>9$ entraine que $u_n>9$. En conséquence, d'après la question 5 de la partie A, il faudra plus de 11 prises pour la quantité moyenne de médicament dans l'organisme du malade soit supérieure ou égale à 9 ml.

Raisonnement 3 : D'après la question 5 de la partie A, on sait que la quantité du médicament dans l'organisme d'un malade dépasse les 9 ml après la 11-ème dose.

Autrement dit, avant la 11-ème prise du médicament les valeurs de u_n sont inférieures à 9 et par conséquent la moyenne de ces valeurs reste forcément inférieure à 9.

D'où le résultat.

Exercice 2

5 points/20

En France il y a deux formules pour obtenir le permis de conduire :

— Suivre à partir de 15 ans une formation de conduite accompagnée pendant 2 ans ;
— Suivre la formation classique (sans conduite accompagnée) à partir de 17 ans.

En France actuellement, parmi les jeunes qui suivent une formation au permis de conduire, 16 % choisissent la formation de conduite accompagnée, et parmi eux, 74,7 % réussissent l'examen de conduite dès leur première tentative.

En suivant la formation classique, le taux de réussite dès la première tentative est seulement de 56,8 %.

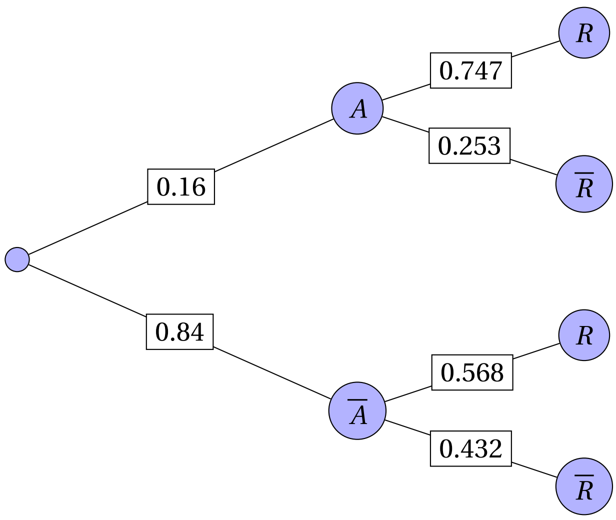
On choisit au hasard un jeune français qui a déjà passé l'examen de conduite et on considère les évènements A et R suivants :

— A : « le jeune a suivi la formation de conduite accompagnée » ;
— R : « le jeune a eu le permis dès sa première tentative ».

On arrondira les résultats à 10^{-3} près, si nécessaire.

Partie A

0,5 pt **1** Ci-après l'arbre de probabilités représentant cette situation.



0,5 pt **2** (a) Les deux événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. Ainsi, selon la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A\cap R)+P\left(\overline{A}\cap R\right)\\ &= P(A)\times P_A(R)+P\left(\overline{A}\right)\times P_{\overline{A}}(R)\\ &= 0,16\times 0,747+0,84\times 0,568\\ &= 0,11952+0,47712\\ &= 0,59664. \end{aligned}$$

0,25 pt (b) À 10^{-3} près, $P(R)\approx 0,597$, soit $P(R)\approx 59,7\%$.

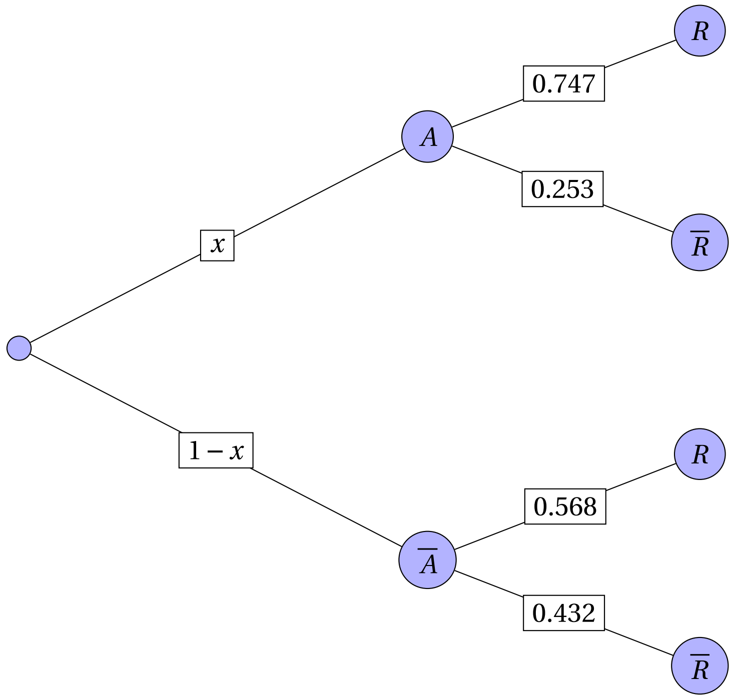
Cela signifie qu'environ 59,7 % des candidats jeunes en France obtiennent le permis de conduire dès le premier passage.

0,5 pt **3** Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned} P_R(A) &= \frac{P(A\cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{P(A)P_A(R)}{P(R)} \\ &\approx \frac{0,16\times 0,747}{0,597} \\ &\approx 0,200. \end{aligned}$$

0,75 pt **4** Soit x la proportion de jeunes suivant la formation de conduite accompagnée permettant un taux de réussite global, dès la première tentative à l'examen de conduite, supérieur à 70 %.

L'arbre de probabilité modélisant cette situation est alors donné par :



En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A\cap R)+P\left(\overline{A}\cap R\right) \\ &= P(A)\times P_A(R)+P\left(\overline{A}\right)\times P_{\overline{A}}(R) \\ &= x\times 0,747+(1-x)\times 0,568 \\ &= 0,747x+0,568-0,568x \\ &= 0,179x+0,568. \end{aligned}$$

Dire que la proportion de réussite est supérieure à 70% revient à dire :

$$\begin{aligned} P(R)>0,70 &\iff 0,179x+0,568>0,7 \\ &\iff 0,179x>0,132 \\ &\iff x>\frac{0,132}{0,179}. \end{aligned}$$

Or, $\frac{0,132}{0,179}\approx 0{,}737$. Donc pour dépasser un taux de réussite global de 70 % il faut au moins que 73,7 % des jeunes choisissent la conduite accompagnée.

Partie B

Une auto-école présente pour la première fois à l'examen de conduite 10 candidats qui ont suivi la formation de conduite accompagnée. On modélise le fait de passer les examens de conduite par des épreuves aléatoires indépendantes.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative.

0,5 pt **1** L'expérience aléatoire consistant à choisir un candidat jeune ayant opté pour la conduite accompagnée est une épreuve de Bernoulli, la probabilité d'un succès est égale à $p = 0,747$.
Cette épreuve est répétée de façon indépendante et identique.
La variable aléatoire X donnant le nombre de succès dès la première tentative suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,747$.

0,5 pt **2** On sait que :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 6) &= 1 - P(\overline{X \geqslant 6}) \\ &= 1 - P(X < 6) \\ &= 1 - P(X \leqslant 5). \end{aligned}$$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(X \leqslant 5) \approx 0,082$ ce qui implique que $P(X \geqslant 6) \approx 0,918$.

Cela signifie que la probabilité qu'au moins 6 candidats jeunes parmi les 10 réussissent l'examen de conduite dès la première tentative est égale à environ $0,918$, soit un pourcentage d'environ $91,8\,\%$.

0,5 pt **3** On sait que : $X \sim \mathscr{B}(n; 0,747)$. Ainsi,

$$\begin{cases} E(X) = np = 10 \times 0,747 = 7,47. \\ V(X) = np\left(1-p\right) = 10 \times 0,747 \times (1 - 0,747) = 1,88991 \approx 1,890. \end{cases}$$

4 Il y a aussi 40 candidats qui n'ont pas suivi la formation de conduite accompagnée et qui se présentent pour la première fois à l'examen de conduite. De la même manière, on note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces candidats qui auront le permis à la première tentative. On admet que Y est indépendante de la variable X et qu'en fait $E(Y) = 22,72$ et $V(Y) = 9,81504$.

On note alors Z la variable aléatoire comptant le nombre total de candidats (parmi les 50) qui auront le permis de conduire dès la première tentative.

0,25 pt (a) Il est évident que : $Z = X + Y$.

0,75 pt (b) En utilisant la linéarité de l'espérance, on obtient :

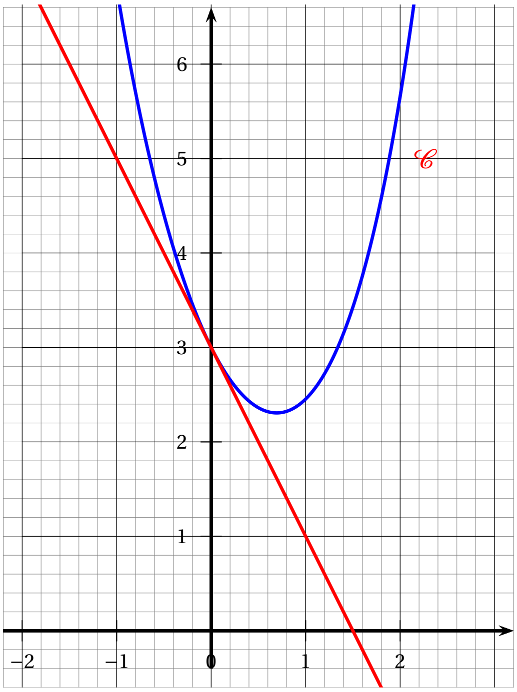
$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X+Y) \\ &= E(X) + E(Y) \\ &= 7,47 + 22,72 \\ &= 30,19. \end{aligned}$$

Les deux variables X et Y sont indépendantes, donc :

$$\begin{aligned} V(Z) &= V(X+Y) \\ &= V(X) + V(Y) \\ &= 1,88991 + 9,81504 \\ &= 11,70495 \\ &\approx 11,705. \end{aligned}$$

Exercice 3 5 points/20

Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x} + ax + be^{-x}.$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.

Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

0,75 pt **1** Selon la précision permise par la lecture graphique, on a :

$$\begin{cases} f(0) = 3. \\ f'(0) = \dfrac{5-1}{-1-1} = \dfrac{4}{-2} = -2 \text{ soit, le coefficient directeur de l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.} \end{cases}$$

0,5 pt **2** En utilisant l'expression de la fonction f, on obtient : $f(0) = 1 + b$.
Or, $1 + b = 3$, donc $b = 2$.

3 On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

0,5 pt (a) On sait que : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$. Lorsque $u(x) = -x$, cela donne $(e^{-x})' = -e^{-x}$.
Ainsi, $f'(x) = e^{x} + a - be^{-x} = e^{x} + a - 2e^{-x}$.

0,25 pt (b) $f'(0) = 1 + a - 2 = a - 1$.

0,5 pt (c) D'après la question 1., $f'(0) = -2$. Donc, $a - 1 = -2$, soit $a = -1$.
En conséquence, $f(x) = e^{x} - x + 2e^{-x}$.

4 On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + y = 2e^{x} - x - 1$$

0,5 pt (a) La fonction $x \longrightarrow e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $x \longrightarrow e^{x}$ et $x \longrightarrow -x$.

La fonction g est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $x \longrightarrow e^{x}$; $x \longrightarrow -x$ et $x \longrightarrow 2e^{-x}$. Ainsi, $g'(x) = e^{x} - 1 - 2e^{-x}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} g'(x) + g(x) &= e^{x} - 1 - 2e^{-x} + e^{x} - x + 2e^{-x} \\ &= 2e^{x} - x - 1. \end{aligned}$$

On en déduit alors que la fonction g est bel et bien une solution particulière de l'équation différentielle (E).

0,5 pt (b) $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$. Cette équation différentielle s'écrit sous la forme $y' = ay$ avec $a = -1$.
Ainsi, l'ensemble des solutions est donné par l'expression : $h(x) = Ce^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

On peut formuler la réponse autrement : les solutions de cette équation différentielle sont sous la forme : $h(x) = Ce^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

0,25 pt (c) Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$S(x) = \underbrace{e^x - x + 2e^{-x}}_{\text{Solution particulière de (E)}} + \underbrace{Ce^{-x},\ \text{avec } C \in \mathbb{R}.}_{\text{Solutions de l'équation homogène associée à (E)}}$$

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$

0,25 pt **1** Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}\left(e^x - 2\right)\left(e^x + 1\right) &= \left(e^x\right)^2 + e^x - 2e^x - 2\\ &= e^{2x} - e^x - 2.\end{aligned}$$

0,5 pt **2** Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}g'(x) &= e^x - 1 - 2e^{-x}\\ &= e^{-x}\left(e^{2x} - e^x - 2\right) \quad \text{car, } e^{-x} \times e^x = 1 \text{ et } e^{-x} \times e^{2x} = e^x\\ &= e^{-x}\left(e^x - 2\right)\left(e^x + 1\right) \quad \text{selon la question précédente.}\end{aligned}$$

0,5 pt **3** Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $e^{-x} > 0$ et $e^x + 1 > 0$.

De plus, pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $e^x > e^1$, car la fonction $x \longrightarrow e^x$ est strictement croissante, soit $e^x > 2$.

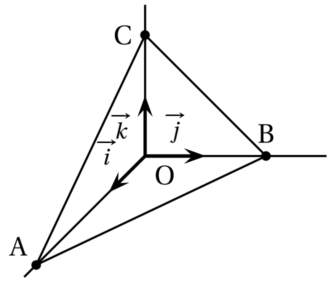
En conséquence, pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $g'(x) > 0$. Autrement dit, g est croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

Exercice 4

5 points/20

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.

On considère les trois points A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 2).



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :

« Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre OABC »,

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

0,75 pt **1** On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\\ z_B - z_A\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-3\\ 2-0\\ 0-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\\ z_C - z_A\end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-3\\ 0-0\\ 2-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$.

De plus, $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = -3\times 2 + 2\times 3 + 0\times 3 = 0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = -3\times 2 + 0\times 3 + 2\times 3 = 0.\end{cases}$

Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ engendrant le plan (ABC). En conséquence, le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

0,75 pt **2** **Méthode 1 :** Soit $M(x; y; y) \in$ (ABC). Ainsi, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur appartenant au plan (ABC).

Dès lors,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2(x-3) + 3y + 3z = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x + 3y + 3z - 6 = 0. \end{aligned}$$

En conséquence, le plan (ABC) a bel et bien pour équation cartésienne : $2x + 3y + 3z - 6 = 0$.

Méthode 2 : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ est vecteur normal au plan (ABC).

Une équation cartésienne est alors donnée par : $2x + 3y + 3z + d = 0$, avec d un réel à déterminer.
Par ailleurs, $A \in (ABC)$ donc $2x_A + 3y_A + 3z_A + d = 0$ soit, $2 \times 3 + 3 \times 0 + 3 \times 0 + d = 0$.
On en déduit alors que $d = -6$.
En conclusion, le plan (ABC) a bel et bien pour équation cartésienne : $2x + 3y + 3z - 6 = 0$.

0,5 pt **3** Soit $M(x; y; y)$ un point de la droite d passant par O.

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d.

Les deux vecteur $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires, il existe alors un réel t tel que $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{n}$.
Une représentation paramétrique de la droite d passant par O est ainsi donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 2t \\ y &=& 3t \\ z &=& 3t \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

0,75 pt **4** Le point $\mathrm{H}(x_H; y_H; z_H)$ appartient $d \cap$(ABC) donc il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x_H = 2t \\ y_H = 3t \\ z_H = 3t \\ 2x_H + 3y_H + 3z_H - 6 = 0. \end{cases}$$

Ainsi, $2 \times 2t + 3 \times 3t + 3 \times 3t - 6 = 0$, soit $22t - 6 = 0$. Donc, $t = \dfrac{3}{11}$.

On en déduit alors les coordonnées de H : $\left(\dfrac{6}{11}; \dfrac{9}{11}; \dfrac{9}{11}\right)$.

0,5 pt **5** **Méthode 1 :** H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC). Autrement dit, OH est la distance entre le point O et le plan (ABC). Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{OH} &= \sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{36 + 81 + 81}{11^2}} \\ &= \sqrt{\frac{198}{11^2}} \\ &= \frac{3\sqrt{22}}{11}. \end{aligned}$$

Méthode 2 : Cette méthode est complètement déconseillée, la formule utilisée n'est plus dans le programme officiel.

La distance entre le point O et le plan (ABC) est donnée par :

$$\begin{aligned} d(O;(ABC)) &= \frac{|2x_O+3y_O+3z_O-6|}{\sqrt{2^2+3^2+3^2}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{22}} \\ &= \frac{6\sqrt{22}}{22} \\ &= \frac{3\sqrt{22}}{11}. \end{aligned}$$

Partie 2 : Démonstration de la propriété

0,5 pt **1** Soit $\mathscr{A}_{0AB}$ l'aire du triangle OAB. En prenant pour base le triangle OAB et pour hauteur OC, le volume $\mathscr{V}$ du tétraèdre OABC est donné par :

$$\begin{aligned} \mathscr{V} &= \frac{\text{OC}\times\mathscr{A}_{OAB}}{3} \\ &= \frac{\text{OC}\times\frac{OB\times OA}{2}}{3} \\ &= \frac{\text{OC}\times OB\times OA}{6} \\ &= \frac{2\times2\times3}{6} \\ &= 2\ u.v.\ \text{(unités de volume)} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

0,75 pt **2** Soit $\mathscr{A}_{ABC}$ l'aire du triangle ABC. En prenant pour base le triangle ABC et pour hauteur OH, le volume du tétraèdre OABC est donné par : $\mathscr{V}=\dfrac{\text{OH}\times\mathscr{A}_{ABC}}{3}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \frac{3\times\mathscr{V}}{OH} \\ &= \frac{3\times2}{\frac{3\sqrt{22}}{11}} \\ &= \frac{11\times2}{\sqrt{22}} \\ &= \sqrt{22}\ u.a.\ \text{(unités d'aire)} \end{aligned}$$

0,5 pt **3** Soit $\mathscr{A}_{0AC}$ l'aire du triangle OAC. Ainsi, $\mathscr{A}_{0AC}=\dfrac{OA\times OC}{2}=3$ u.a.

Soit $\mathscr{A}_{0BC}$ l'aire du triangle OBC. Ainsi, $\mathscr{A}_{0BC}=\dfrac{OB\times OC}{2}=2$ u.a.

Par ailleurs, on a, d'une part : $\mathscr{A}^2_{0AC}+\mathscr{A}^2_{0AB}+\mathscr{A}^2_{0BC}=3^2+3^2+2^2=22$.
Et, d'autre part, $\mathscr{A}^2_{ABC}=22$.

Ainsi, $\mathscr{A}^2_{ABC}=\mathscr{A}^2_{0AC}+\mathscr{A}^2_{0AB}+\mathscr{A}^2_{0BC}$. En conséquence la propriété « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre » est bien vraie.