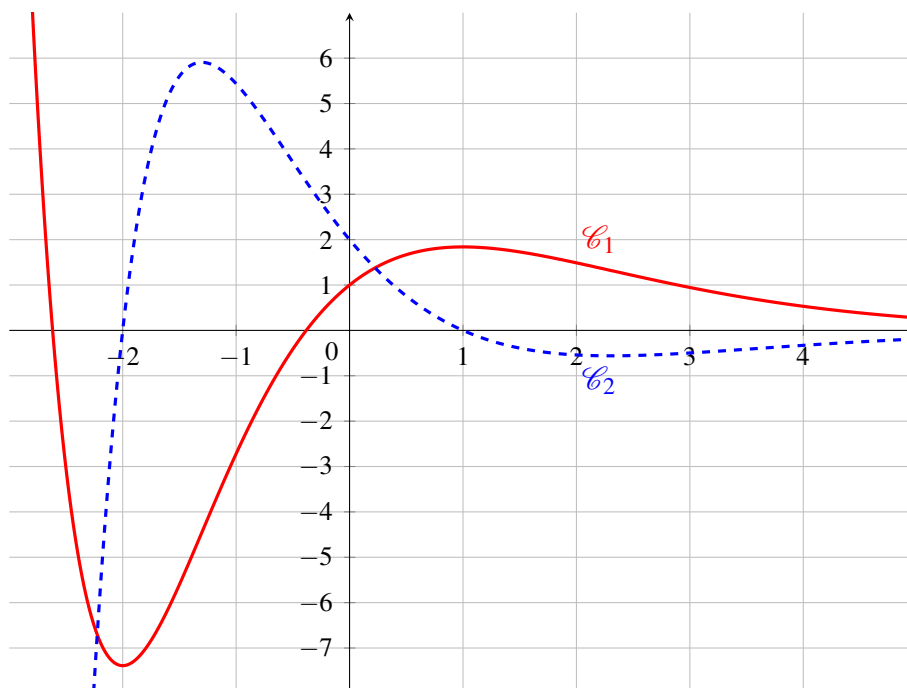


Exercice 1 :

Partie A : On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} . L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g' .

On précise également que :

- La courbe \mathcal{C}_1 coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 1)$.
- La courbe \mathcal{C}_2 coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2 ; 0)$ et $(1 ; 0)$.



- 1 En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.
- 2 Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B : On considère (E) l'équation différentielle

$$y' + y = (2x + 3)e^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x .

- 1 Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
- 2 Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y + y' = 0$.
- 3 Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) .
- 4 On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E) . Déterminer alors l'expression de la fonction g .
- 5 Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C : On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}.$$

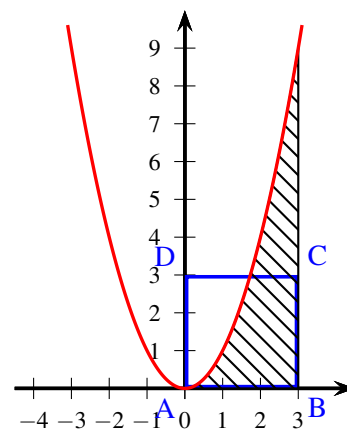
- 1 Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.
On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.
- 2 On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . On note f' la fonction dérivée de f sur \mathbb{R} .
 - (a) Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$.
 - (b) Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur \mathbb{R} puis en déduire les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
- 3 Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- 4 On notera \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f .
Soit α un nombre réel positif.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

Exercice 2 :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1 Soient E et F les ensembles $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ et $F = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.
Affirmation n° 1 : Il y a davantage de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F .

- 2 Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté la fonction carré, notée f , ainsi que le carré ABCD de côté 3.
Affirmation n° 2 : La zone hachurée et le carré ABCD ont la même aire.



- 3 On considère l'intégrale J ci-dessous :

$$J = \int_1^2 x \ln(x) dx.$$

Affirmation n° 3 : Une intégration par parties permet d'obtenir : $J = \frac{7}{11}$.

- 4 Sur \mathbb{R} , on considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' = 2y - e^x.$$

Affirmation n° 4 : La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x + e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E) .

5 Soit x donné dans $]0; 1[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (x - 1)e^n + \cos(n).$$

Affirmation n° 5 : La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Exercice 3 :

Soit a un réel strictement positif.

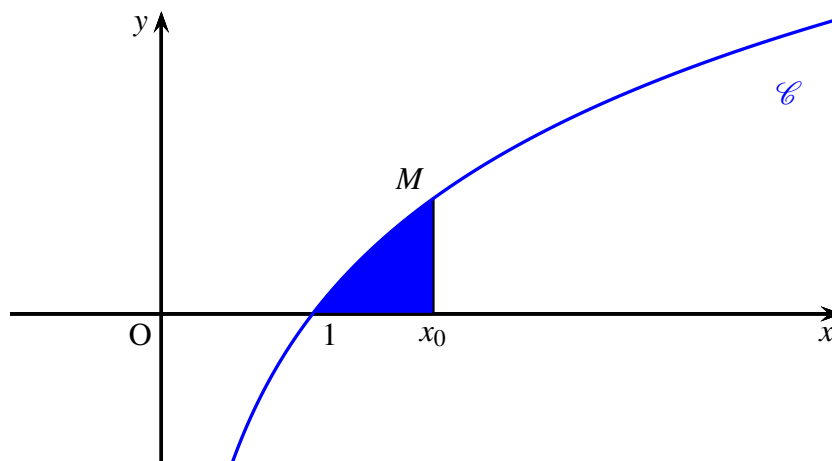
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = a \ln(x).$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

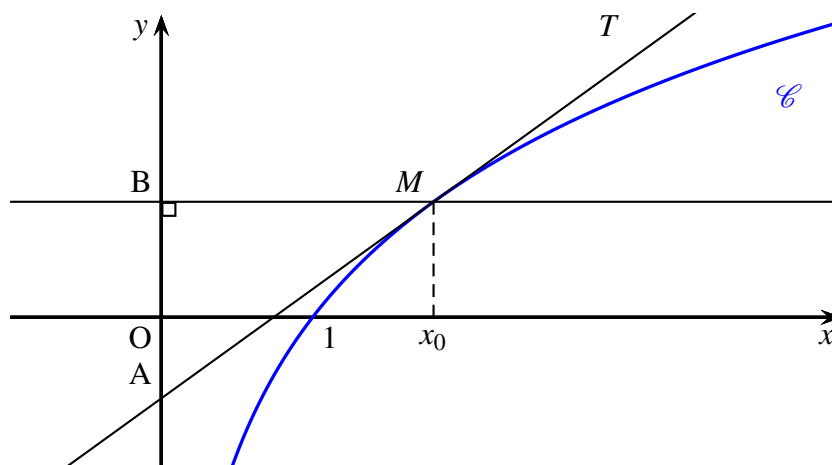
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

- 1 Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de l'axe des abscisses.
- 2 Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x \ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 3 En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de a et de x_0 .



On note T la tangente à la courbe \mathcal{C} au point M d'abscisse x_0 .

On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



- 4 Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.

Exercice 4 :

PARTIE A : On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + \frac{1}{4}y = 20e^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1 Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) .

2 On considère l'équation différentielle

$$(E') : y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') .

3 En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .

4 Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

PARTIE B : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. De plus, on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1 (a) Justifier que, pour tout réel x positif,

$$f'(x) = (18 - 5x)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

(b) En déduire le tableau de variations de la fonction f . On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2 Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[14 ; 15]$.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = xe^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

On appelle \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f , c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f' .

Partie A : Étude de la fonction f

1 Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2 Pour tout réel x , calculer $f'(x)$.

3 Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x - 2)e^{-x}$$

- 4 Étudier la convexité de la fonction f .
- 5 Étudier les variations de la fonction f' sur \mathbb{R} , puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
- 6 En déduire le signe de la fonction f' sur \mathbb{R} , puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- 7 Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
Donner un encadrement de α , au centième près.
- 8 On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à la droite Δ .

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe \mathcal{C}_f , la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n xe^{-x} dx$$

- 1 À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n .
- 2 (a) Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n .
(b) Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

On considère également les points suivants :

- A(3 ; -3 ; -2)
- B(5 ; -4 ; -1)
- C le point de la droite (d) d'abscisse 2
- H le projeté orthogonal du point B sur le plan \mathcal{P} d'équation $x + 3z - 7 = 0$

Affirmation 1

La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2

Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne :

$$x + 3z + 3 = 0$$

Affirmation 3

Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique \widehat{BAC} est $\frac{\pi}{6}$.

Affirmation 4

La distance BH est égale à $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Exercice 7 :

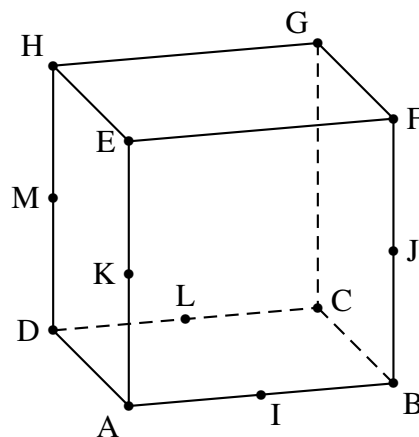
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

PARTIE A

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.

Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



Affirmation 1 : « $\vec{JH} = 2\vec{BI} + \vec{DM} - \vec{CB}$ »

Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $(\vec{AB}, \vec{AH}, \vec{AG})$ est une base de l'espace. »

Affirmation 3 : « $\vec{IB} \cdot \vec{LM} = -\frac{1}{4}$. »

PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan \mathcal{P} d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$
- les points $A(2 ; 0 ; -1)$ et $B(5 ; -3 ; 7)$

Affirmation 4 : « Le plan \mathcal{P} et la droite (AB) sont parallèles. »

Affirmation 5 : « Le plan \mathcal{P}' parallèle à \mathcal{P} passant par B a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$ »

Affirmation 6 : « La distance du point A au plan \mathcal{P} est égale à $\frac{\sqrt{14}}{2}$. »

On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases}, \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

Exercice 8 :

L'objet de cet exercice est l'étude de l'arrêt d'un chariot sur un manège, à partir du moment où il entre dans la zone de freinage en fin de parcours.

On note t le temps écoulé, exprimé en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage, exprimée en mètre, en fonction de t , à l'aide d'une fonction notée d définie sur $[0 ; +\infty[$.

On a ainsi $d(0) = 0$.

Par ailleurs, on admet que cette fonction d est dérivable sur son ensemble de définition. On note d' sa fonction dérivée.

Partie A

Sur la figure (Fig. 2) ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative \mathcal{C}_d de la fonction d ;
- la tangente T à la courbe \mathcal{C}_d au point A d'abscisse 4,7 ;
- l'asymptote Δ à \mathcal{C}_d en $+\infty$.

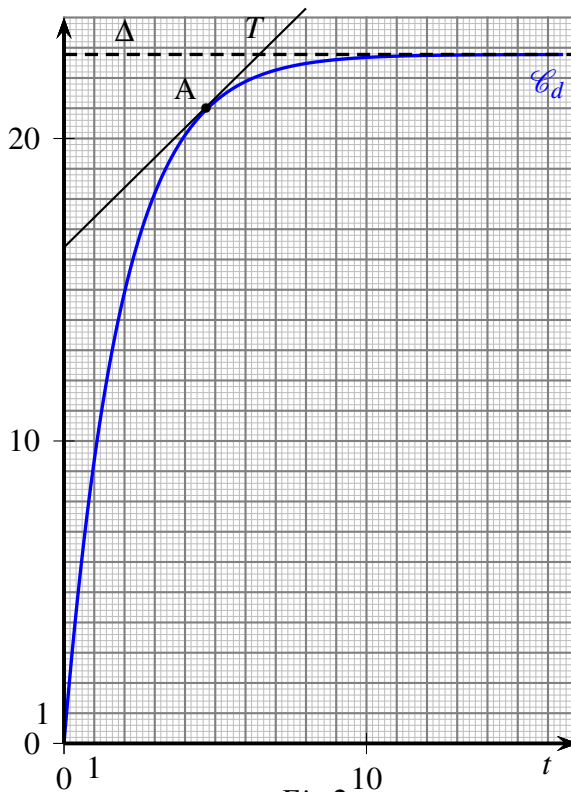


Fig.2

Dans cette partie, aucune justification n'est attendue.

Avec la précision que permet le graphique, répondre aux questions ci-dessous.
D'après ce modèle :

- 1 Au bout de combien de temps le chariot aura-t-il parcouru 15 m dans la zone de freinage ?
- 2 Quelle longueur minimale doit-être prévue pour la zone de freinage ?
- 3 Que vaut $d'(4,7)$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On rappelle que t désigne le temps écoulé, en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde (m.s^{-1}), en fonction de t , par une fonction v définie sur $[0 ; +\infty[$.

On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée ;

- la fonction v est une solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' + 0,6y = e^{-0,6t},$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y .

On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 m.s^{-1} , c'est-à-dire $v(0) = 12$.

- 1 (a) On considère l'équation différentielle

$$(E') : y' + 0,6y = 0.$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0 ; +\infty[$.

- (b) Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = te^{-0,6t}$.

Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E) .

- (c) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0 ; +\infty[$.

- (d) En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}.$$

- 2 Dans cette question, on étudie la fonction v sur $[0 ; +\infty[$.

- (a) Montrer que pour tout réel $t \in [0 ; +\infty[$, $v'(t) = (-6,2 - 0,6t)e^{-0,6t}$.

- (b) En admettant que :

$$v(t) = 12e^{-0,6t} + \frac{1}{0,6} \times \frac{0,6t}{e^{0,6t}},$$

déterminer la limite de v en $+\infty$.

- (c) Étudier le sens de variation de la fonction v et dresser son tableau de variation complet. Justifier.

- (d) Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une solution unique α , dont on donnera une valeur approchée au dixième.

- 3 Lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde, un système mécanique se déclenche permettant son arrêt complet.

Déterminer au bout de combien de temps ce système entre en action. Justifier.

Partie C

On rappelle que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}.$$

On admet que pour tout réel t dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$d(t) = \int_0^t v(x) dx.$$

- 1 À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la distance parcourue par le chariot entre les instants 0 et t est donnée par :

$$d(t) = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}.$$

- 2 On rappelle que le dispositif d'arrêt se déclenche lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde.

Déterminer, selon ce modèle, une valeur approchée au centième de la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage avant le déclenchement de ce dispositif.

Exercice 9 :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1 On considère les points $A(-1; 0; 5)$ et $B(3; 2; -1)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB) .

2 On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
- la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3 On considère le plan \mathcal{P} d'équation $x - y + z + 1 = 0$.

Affirmation 4 : La distance du point $C(2; -1; 2)$ au plan \mathcal{P} est égale à $2\sqrt{3}$.

Exercice 10 :

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n , on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024 + n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

1 Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.

2 On note h la fonction définie sur $[0; 20]$ par

$$h(x) = -0,02x^2 + 1,3x.$$

On admet que h est croissante sur $[0; 20]$.

(a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

- (b) En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
 (c) Justifier que $L = 15$.

3 Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

- (a) Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
 (b) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
    n=0
    u= 1
    while ..... :
        n=.....
        u=.....
    return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t , en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$;
- f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$;
- f est solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1) : y' = 0,02y(15 - y).$$

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression. On note f' la fonction dérivée de f .

1 Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.

Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2) : y' = -0,3y + 0,02.$$

2 Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2) .

3 En déduire que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1}.$$

4 Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5 Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 11 :

On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O.

Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.

Au sein de la population française, on sait que :

- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 % sont de rhésus positif ;

- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif ;
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 % sont de rhésus positif.

On choisit au hasard une personne dans la population française.

On désigne par :

- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A » ;
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B » ;
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB » ;
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O » ;
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif ».

Pour un évènement quelconque E , on note \bar{E} l'évènement contraire de E et $p(E)$ la probabilité de E .

1 Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.

2 Montrer que $p(B \cap R) = 0,084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3 On précise que $p(R) = 0,8397$.
Montrer que $p_O(R) = 0,83$.

4 On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.

Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.

Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de 0,0714.

5 Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

- Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.
- Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à 7,14 et que sa variance $V(X)$ est égale à 6,63 à 10^{-2} près.

6 Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées 1,2, 3, ..., N où N est un entier naturel non nul.

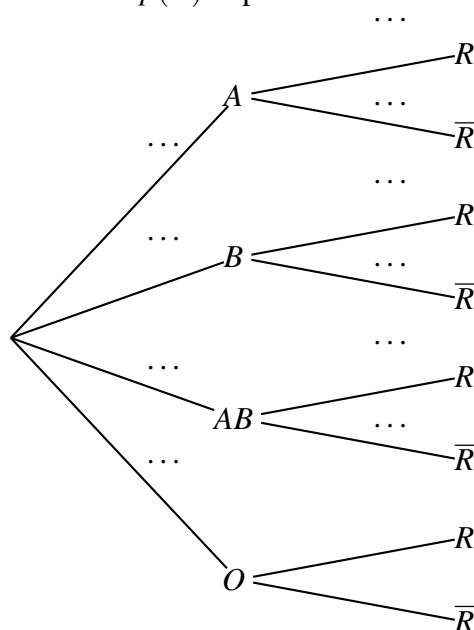
On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, ..., X_N pour la ville N .

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à 7,14 et la même variance égale à 6,63.

On considère la variable aléatoire $M_N = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$.

- Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?
- Calculer l'espérance $E(M_N)$.



(c) On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N .

Montrer que $V(M_N) = \frac{6,63}{N}$.

(d) Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé- Tchebychev permet d'affirmer que :

$$P(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95.$$

Exercice 12 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

- les points $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d: \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d': \begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - 2s \end{cases} \text{ avec } s \in \mathbb{R};$$

Partie A

1 Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S(-\frac{1}{2}; 1; 4)$.

2 (a) Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

(b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x + 2y + 4z - 7 = 0.$$

3 Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

4 (a) Démontrer que le point $H(-1; 0; 2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).

(b) En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment [CS]. On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0; 1]$.

1 Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k .

2 Existe-t-il un point M sur le segment [CS] tel que le triangle (MAB) soit rectangle en M ?

Exercice 13 :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :

$$(P) : 2x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

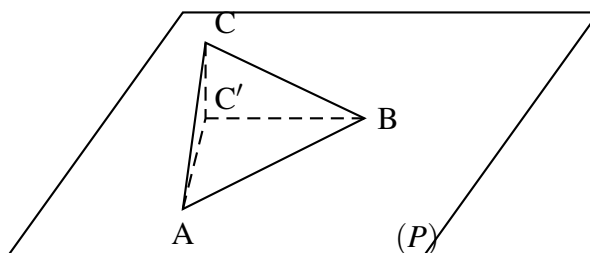
$$A(1; 0; 1), B(2; -1; 1) \text{ et } C(-4; -6; 5).$$

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

Partie A

- 1 Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P) .
- 2 Montrer que le point $C'(0; -2; -1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P) .
- 3 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- 4 On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions

$$\begin{cases} H \in (AB) \\ (AB) \text{ et } (HC) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$$
 Déterminer les coordonnées du point H.

**Partie B**

On admet que les coordonnées du vecteur \vec{HC} sont : $\vec{HC} \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.

- 1 Calculer la valeur exacte de $\|\vec{HC}\|$.
- 2 Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S .

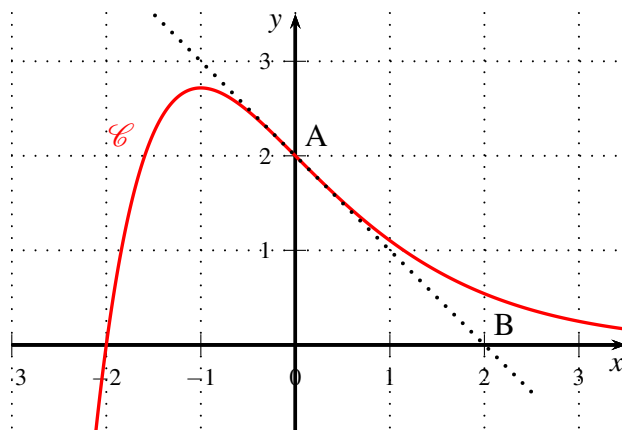
Partie C

On admet que $HC' = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

- 1 Soit $\alpha = \widehat{CHC'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
- 2 (a) Montrer que les droites $(C'H)$ et (AB) sont perpendiculaires.
 (b) Calculer S' l'aire du triangle ABC' , on donnera la valeur exacte.
 (c) Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

Exercice 14 :

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f définie sur \mathbb{R} :



On considère les points $A(0; 2)$ et $B(2; 0)$.

Partie 1

Sachant que la courbe \mathcal{C} passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe \mathcal{C} au point A , donner par lecture graphique :

- 1 La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
- 2 Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle

$$y' = -y + e^{-x}.$$

On admet que $g : x \mapsto xe^{-x}$ est une solution particulière de (E) .

- 1 Donner toutes les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $(H) : y' = -y$.
- 2 En déduire toutes les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E) .
- 3 Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x .

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x , $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

- 1 On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
 - (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$.
 - (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur \mathbb{R} .
On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.
On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur \mathbb{R} .
- 2 On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f .
 - (a) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
 - (b) Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0; +\infty[$?

Exercice 15 :

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie I

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

- 1 Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = xe^{-x}$.
Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E) .
- 2 On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.
Résoudre l'équation différentielle (E') sur \mathbb{R} .
- 3 En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur \mathbb{R} .
- 4 Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie II

Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.

On considère la fonction f_k définie sur \mathbb{R} par :

$$f_k(x) = (x + k)e^{-x}.$$

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par

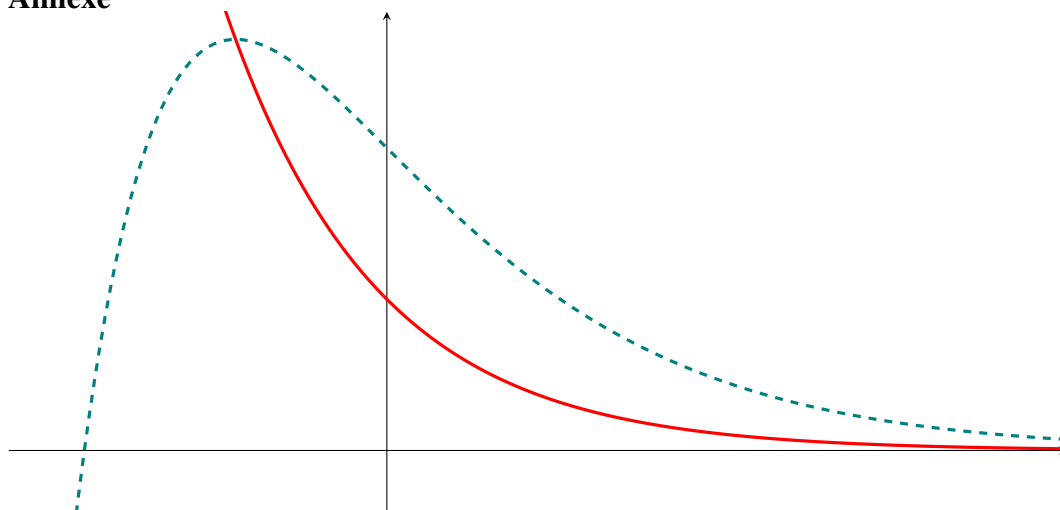
$$h(x) = e^{-x}.$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal et C la courbe représentative de la fonction h .

On a représenté sur le graphique en annexe les courbes C_k et C sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes.

- 1 Sur le graphique en annexe à rendre avec la copie, l'une des courbes est en traits pointillés, l'autre est en trait plein. Laquelle est la courbe C ?
- 2 En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k et placer sur l'annexe à rendre avec la copie l'unité sur chacun des axes du graphique.

Annexe



Exercice 16 :

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers. Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

- la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;

- si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;
- si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'évènement « le joueur tire une épée » ;
- \bar{R} et \bar{E} les évènements contraires des évènements R et E .

- 1 Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
- 2 Calculer la probabilité de tirer une épée.
- 3 Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

- 1 Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
- 2 Déterminer $P(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.
- 3 Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geq k) \geq 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- 4 Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.
Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0,95.
Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en uvre.