Loi binomiale

Suites & Fonctions

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

(a) Montrer que $g'(x)=f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(b) Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}.$$

2 (a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

(b) Interpréter graphiquement ce résultat.

3 (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

(b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

(c) Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.

4 On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et que :

$$f''(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(x-3\sqrt{x}+3\right)}{8x^2\sqrt{x}}.$$

(a) En posant $X=\sqrt{x}$, montrer que $x-3\sqrt{x}+3>0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 2 :

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui- même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A : Le contrôle peut être

- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client ;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total.
Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 30 % des cas.
Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans 85 % des cas, il n'y a pas d'erreur.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique.
On considère les évènements suivants :

- T : « Le contrôle est un contrôle total » ;

- E : « Une erreur est détectée lors du contrôle ».

On notera $\overline{T}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires de T et E.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $P\left(\overline{T} \cap E\right)$.

2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.

3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée. On donnera la valeur arrondie au centième.

Partie B : Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Déterminer la probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées. On donnera la valeur arrondie au centième.

3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. On donnera la valeur arrondie au centième.

4. On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.
   Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

Partie C

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.
On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathscr{B}(20\ ;\ 0,165)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_1.

2. On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2 + X_3$.
   Justifier que $E(S) = 9,9$ et que $V(S) = 8,2665$.

Exercice 3 :

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2}$$

où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

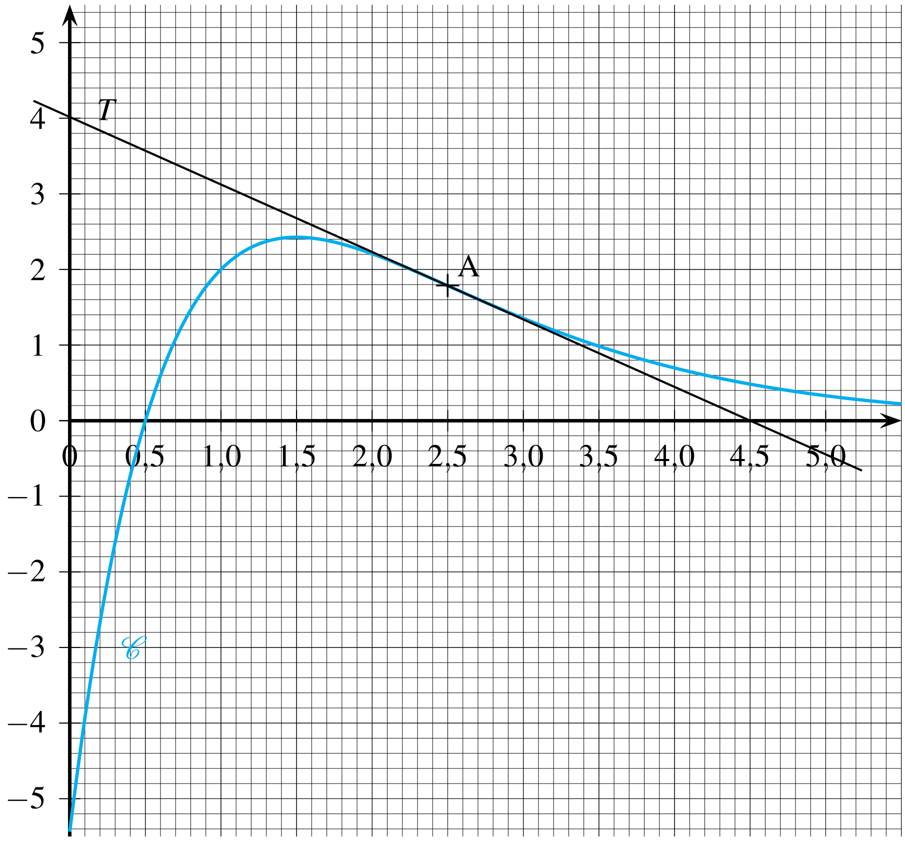
À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous.
Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

— **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».
— **Affirmation 2** : « À très long terme, la population dépassera 21000 bactéries ».
— **Affirmation 3** : « La population de bactéries aura un effectif de 10000 à deux reprises au cours du temps ».

Exercice 4 :

On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.

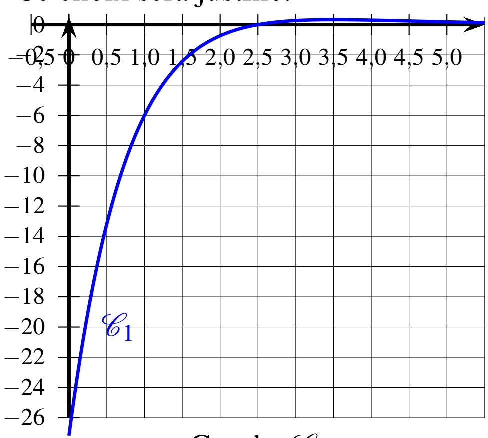
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



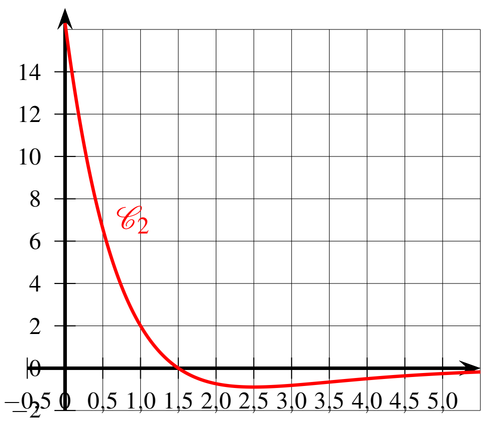
1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$.

2. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}$ au point A ?

3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.
Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.
Ce choix sera justifié.



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, est définie par

$$f(x) = (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}.$$

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

$\boxed{1}$ Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}$.

$\boxed{2}$ Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

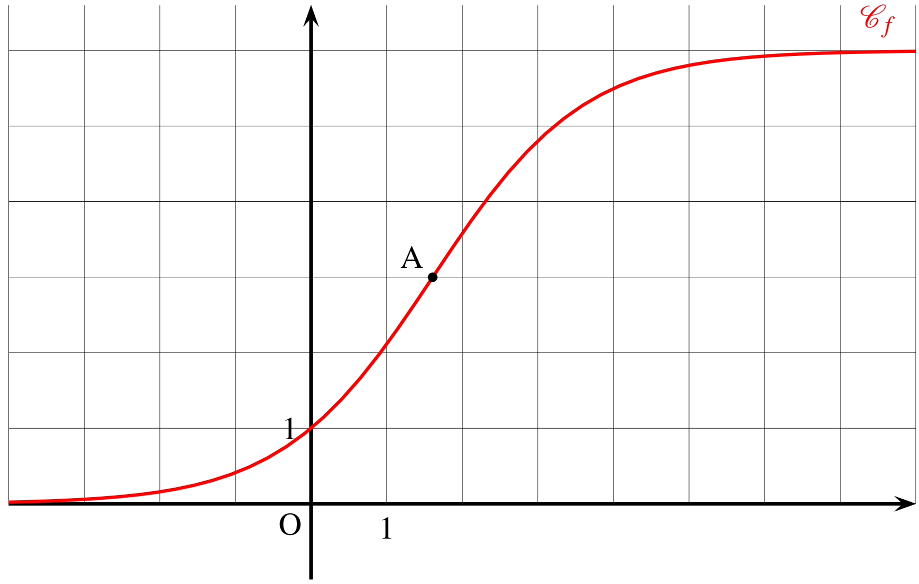
$\boxed{3}$ Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}$$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.



$\boxed{1}$ Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5\ ;\ 3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

$\boxed{2}$ Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

$\boxed{3}$ (a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

(b) En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{4}$ On admet que :

- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée seconde ;
- pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{30\mathrm{e}^{-x}(5\mathrm{e}^{-x}-1)}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^3}.$$

(a) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.

(b) Justifier que pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ \ln 5]$, on a : $f(x) \geqslant \frac{5}{6}x + 1$.

$\boxed{5}$ On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k\ln(\mathrm{e}^x+5)$, où k est une constante réelle.

Exercice 6 :

Toutes les probabilités, sauf indication contraire, seront arrondies à 10^{-3} dans cet exercice.
« Le virus du chikungunya, transmis à l'homme par la piqûre du moustique tigre provoque chez les patients des douleurs articulaires aiguës qui peuvent être persistantes. En 2005, une importante épidémie de chikungunya a touché les îles de l'Océan Indien et notamment l'île de La Réunion, avec plusieurs centaines de milliers de cas déclarés. En 2007, la maladie a fait son apparition en Europe, puis fin 2013, aux Antilles et a atteint le continent américain en 2014 ».
Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus.
Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'un individu atteint par le virus ait un test positif est de $0,999$;

— la probabilité qu'un individu non atteint par le virus ait un test positif est de $0,005$.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population cible.
Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

— M l'évènement : « l'individu choisi est atteint du chikungunya ».

— T l'évènement : « le test de l'individu choisi est positif ».

On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus est supérieure à $0,95$.

Partie A : Étude d'un exemple

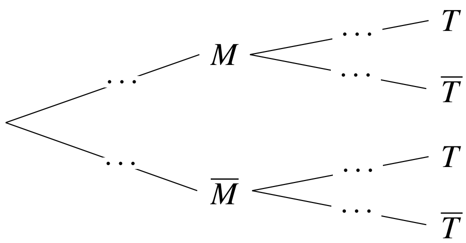
1 Donner les probabilités $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.

« En mars 2005, l'épidémie s'est propagée rapidement dans l'ile de La Réunion, avec une flambée importante entre fin avril et début juin puis une persistance de la transmission virale durant l'hiver austral. Au total, 270 000 personnes ont été infectées pour une population totale de 750 000 individus ».

Fin 2005, le laboratoire a effectué un test de dépistage massif de la population de l'île de La Réunion. Dans cette partie, la population cible est donc la population de l'ile de La Réunion.

2 Donner la valeur exacte de $P(M)$.

3 Recopier et compléter l'arbre pondéré donné ci-dessous.



4 Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par le virus et ait un test positif.

5 Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.

6 Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus.

7 Peut-on estimer que ce test est fiable ? Argumenter.

Partie B : Dépistage sur une population cible

Dans cette partie, on note p la proportion de personnes atteintes par le virus du chikungunya dans une population cible.
On cherche ici à tester la fiabilité du test de ce laboratoire en fonction de p.

1 Recopier, en l'adaptant, l'arbre pondéré de la question A3 en tenant compte des nouvelles données.

2 Exprimer la probabilité $P(T)$ en fonction de p.

3 Montrer que $P_T(M) = \dfrac{999p}{994p+5}$.

4 Pour quelles valeurs de p peut-on considérer que ce test est fiable ?

Partie C : Étude sur un échantillon

Pendant l'épidémie, on admet que la probabilité d'être atteint du chikungunya sur l'ile de La Réunion est de 0,36.
On considère un échantillon de n individus choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant le nombre d'individus infectés dans cet échantillon parmi les n tirés au sort.
On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,36$.
Déterminer à partir de combien d'individus n la probabilité de l'évènement « au moins un des n habitants de cet échantillon est atteint par le virus »est supérieure à $0,99$. Expliquer la démarche.

Exercice 7 :

Dans le magasin d'Hugo, les clients peuvent louer deux types de vélos : vélos de route ou bien vélos tout terrain.
Chaque type de vélo peut être loué dans sa version électrique ou non.
On choisit un client du magasin au hasard, et on admet que :

— Si le client loue un vélo de route, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,4 ;

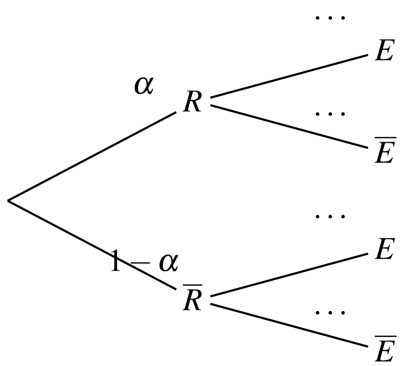
— Si le client loue un vélo tout terrain, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,7 ;

— La probabilité que le client loue un vélo électrique est de 0,58.

On appelle α la probabilité que le client loue un vélo de route, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
On considère les évènements suivants :

- R : « le client loue un vélo de route » ;
- E : « le client loue un vélo électrique » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$, évènements contraires de R et E.

On modélise cette situation aléatoire à l'aide de l'arbre reproduit ci-contre :
Si F désigne un évènement quelconque, on notera $p(F)$ la probabilité de F.



1 Recopier cet arbre sur la copie et le compléter.

2 (a) Montrer que $p(E) = 0,7 - 0,3\alpha$.
(b) En déduire que : $\alpha = 0,4$.

3 On sait que le client a loué un vélo électrique.
Déterminer la probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain. On donnera le résultat arrondi au centième.

4 Quelle est la probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique ?

5 Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros.

Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.

On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.

(a) Donner la loi de probabilité de X. On présentera les résultats sous forme d'un tableau.

(b) Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

6 Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.

On rappelle que la probabilité de l'événement E est : $p(E) = 0,58$.

(a) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.

(c) Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice 8 :

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires.
On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1^{er} janvier de l'année $2020 + n$.

1 (a) Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

(b) On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.

À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

(c) Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10 560
n= 0
while ...... :
    u = ......
    n = ......
```

2 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 12\,500$.

3 Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4 En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.

5 On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12\,500$, pour tout entier naturel n.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,98$ dont on précisera le premier terme.

(b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

(c) En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

(d) Déterminer la limite de la suite (u_n).
Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 12\,500 - 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4},$$

où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000.

Exercice 9 :

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - \mathrm{e}^{0,5x-2}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée.

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

   (b) Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x\left(2 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x} \times \mathrm{e}^{-2}\right)$.

   En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. (a) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

   (b) Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2\ln(2)\ ;\ +\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la partie A.

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

   (b) En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.

2. (a) On rappelle que f vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
   Démontrer que $\ell = 4$.

(b) On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur (a) :
  u = 0
  n = 0
  while u ⩽ a:
    u=1 + u - exp(0.5*u - 2)
    n = n+1
  return n
```

L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 10 :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.
   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
   Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n\ln(u_n).$$

$\boxed{1}$ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

$\boxed{2}$ Justifier que la suite (u_n) converge.
On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

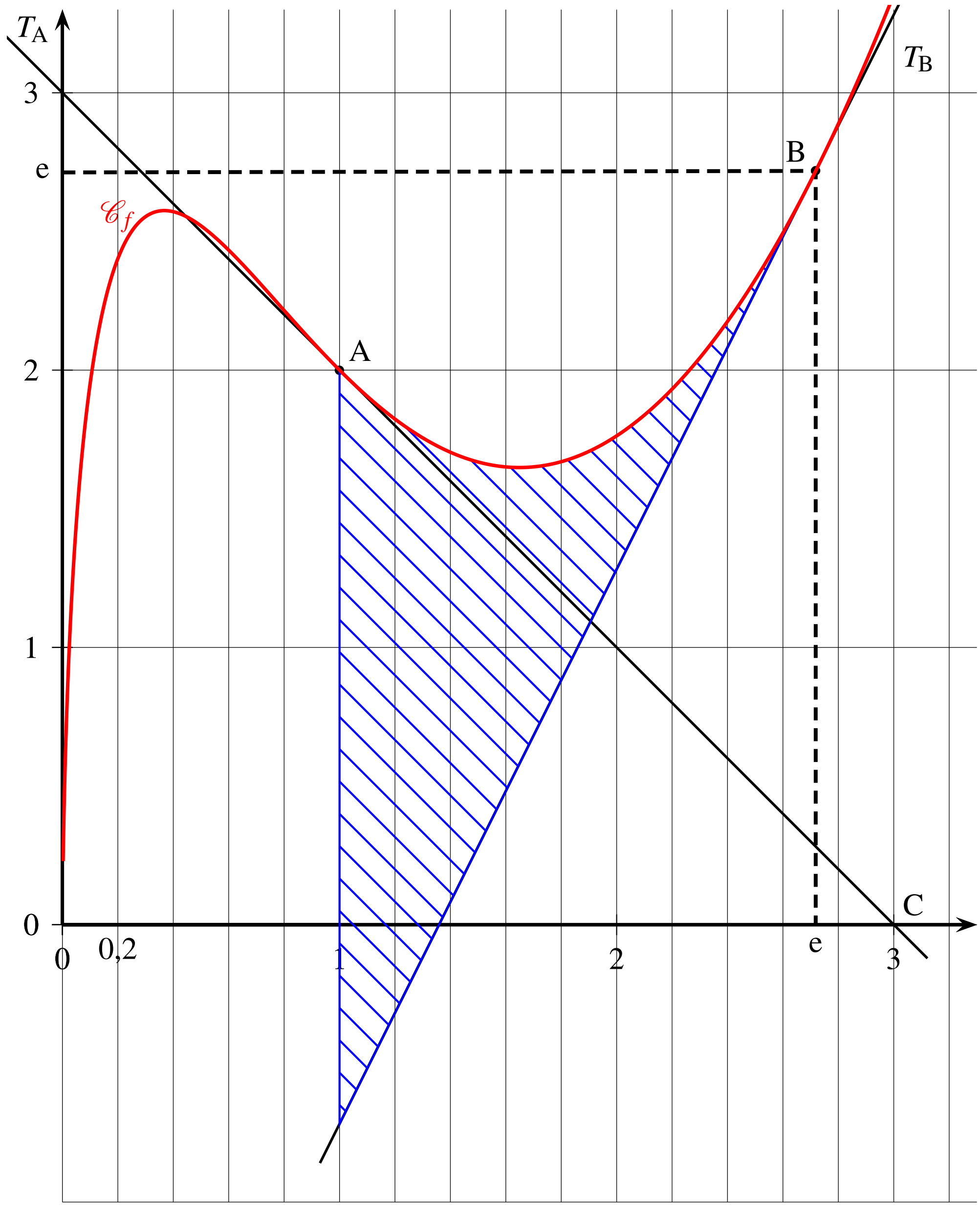
$\boxed{3}$ Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 11 :

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.
Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]0\,;\,3]$;
- la droite T_{A},tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A$(1\,;\,2)$;
- la droite T_{B} tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B$(\text{e}\,;\,\text{e})$.

On précise par ailleurs que la tangente T_{A} passe par le point C$(3\,;\,0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1 Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

2 Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0\,;\,3]$?

3 Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
En déduire que $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

2 Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.

3 On admet que pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, $\quad f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.

(a) Montrer que pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1}{x}(4\ln x + 1)$.

(b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

(c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_{B} sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

Exercice 12 :

On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O.
Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.
Au sein de la population française, on sait que :

- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 % sont de rhésus positif ;
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif ;
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 % sont de rhésus positif.

On choisit au hasard une personne dans la population française.
On désigne par :

- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A » ;
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B » ;
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB » ;
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O » ;
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif ».

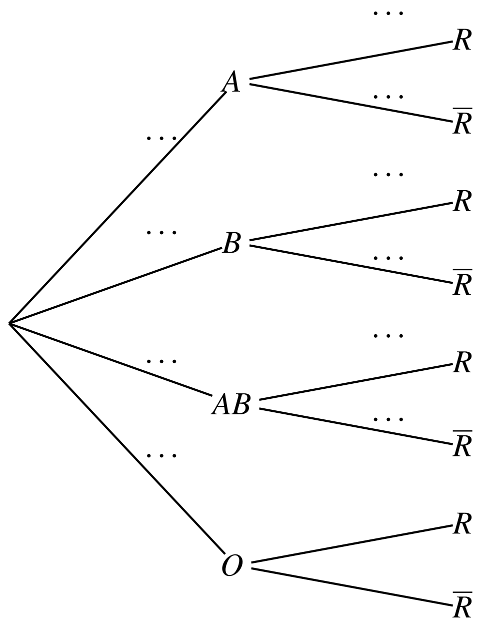
Pour un évènement quelconque E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et $p(E)$ la probabilité de E.

1. Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.

2. Montrer que $p(B \cap R) = 0,084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On précise que $p(R) = 0,8397$.
Montrer que $p_O(R) = 0,83$.

4. On dit qu'un individu est « donneur universel »lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.
Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.
Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de 0,0714.



5. Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

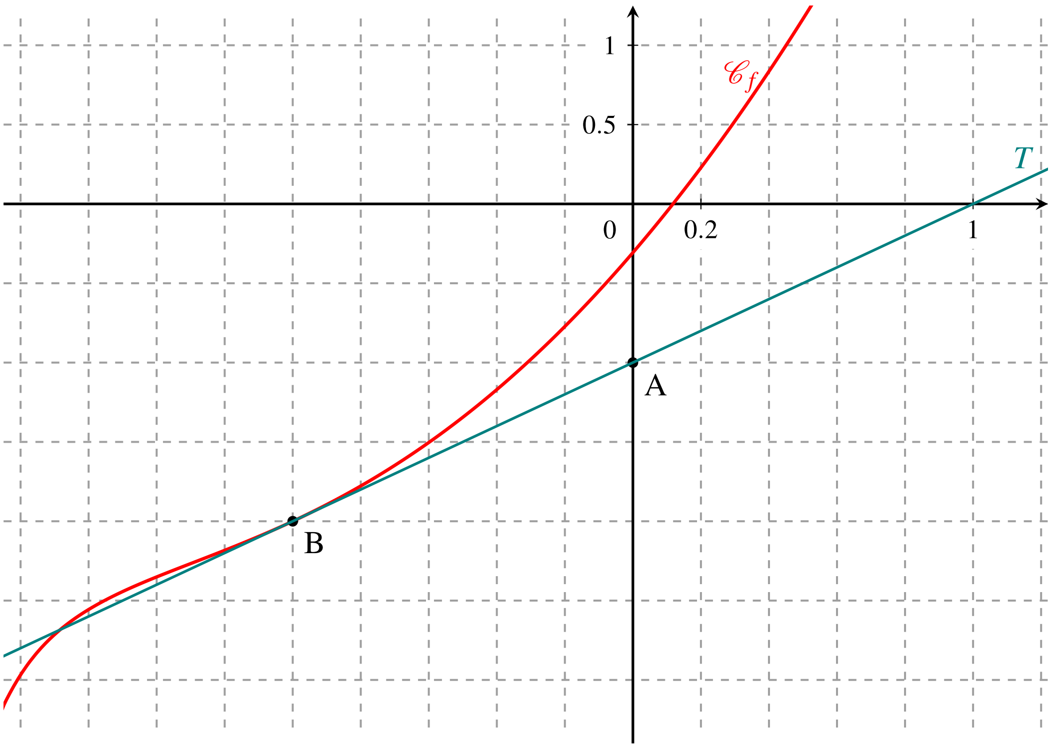
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.
   (c) Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à $7,14$ et que sa variance $V(X)$ est égale à $6,63$ à 10^{-2} près.

6. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées 1,2, 3, ... , N où N est un entier naturel non nul.
On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.
On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, ... , X_N pour la ville N.
On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à $7,14$ et la même variance égale à $6,63$.
On considère la variable aléatoire $M_N = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$.

   (a) Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?
   (b) Calculer l'espérance $E(M_N)$.
   (c) On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N.
   Montrer que $V(M_N) = \dfrac{6,63}{N}$.

Exercice 13 :

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point $\mathrm{A}(0\,;\,-1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.

3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2+2x-1+\ln(x+2),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.
   On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. Montrer que pour tout $x>-2$, $\quad f'(x)=\dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;\,+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

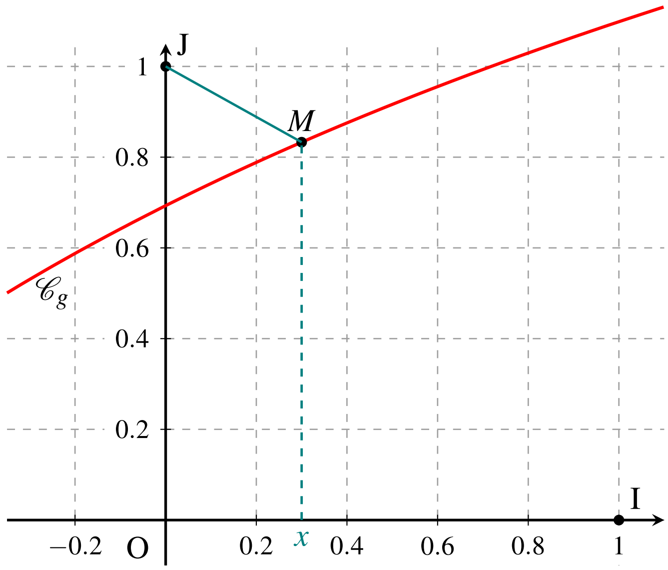
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.

6. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad g(x)=\ln(x+2)$.

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0 ; I , J), représentée ci-après.
Soit M un point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $h(x) = JM^2$.



1 Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

2 On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$

où f est la fonction étudiée en **partie B**.

(a) Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;\,+\infty[$.
Les limites ne sont pas demandées.

(b) En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question **4.** de la **partie B**.

3 On notera M_α le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α.

(a) Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

(b) En déduire que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.
On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

Exercice 14 :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$A(2\,;\,0\,;\,0),\quad B(0\,;\,4\,;\,3),\quad C(4\,;\,4\,;\,1),\quad D(0\,;\,0\,;\,4)\quad \text{et}\quad H(-1\,;\,1\,;\,2)$$

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$.

Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - y + 2z - 2 = 0$.
Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).