# Suites - Variable aléatoire

**Vecteurs, droites et plans dans l'espace**

Évarite Galois
maths-mde.fr

## Exercice 1 :

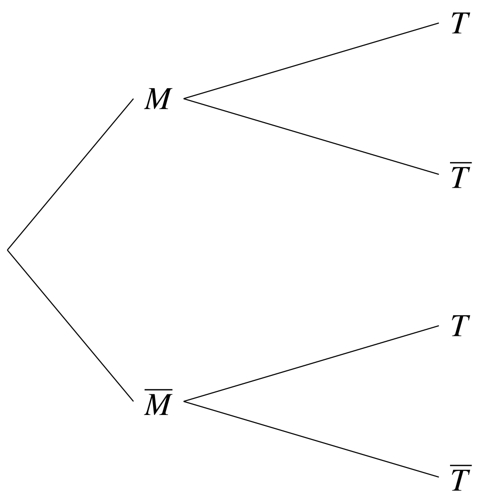
Une maladie touche 20% de la population d'une ville.
Lors d'un dépistage de la maladie, on utilise un test biologique vendu par une entreprise qui a les caractéristiques suivantes :

— lorsque la personne est malade, la probabilité d'avoir un test positif est 0,85 ;

— lorsque la personne n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,95.

On choisit une personne au hasard dans cette population.
On note T l'événement « la personne a un test positif à cette maladie »et M l'événement « la personne est atteinte de cette maladie ».

1 Complétez l'arbre page suivante.




2 Calculer $P(M \cap T)$.

3 Montrer que $P(T) = 0,21$.

4 On appelle *valeur prédictive positive* du test la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif. On estime que ce test est efficace pour une population donnée lorsque cette probabilité est supérieure à 0,95.
Ce test est-il efficace sur la population étudiée ?

5 Le test est vendu 5 €. Si le test ne correspond pas à l'état de la personne l'utilisant, il est intégralement remboursé ; sinon, il ne l'est pas.
Calculer la recette moyenne d'un test pour l'entreprise le commercialisant.

## Exercice 2 :

On définit la suite $(u_n)$ pour tout entier naturel $n$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 \end{cases}$

1 Calculer les 10 premiers termes de cette suite à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur. Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de $(u_n)$ ?

2 On pose $v_n = u_n - 4n + 10$.

(a) Monter que $(v_n)$ est une suite géométrique que l'on caractérisera.

(b) En déduire l'expression de $v_n$ puis celle de $u_n$ en fonction de $n$.

(c) On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Donner l'expression de $S_n$ en fonction de $n$.

## Exercice 3 :

Déterminer les limites des suites suivantes.

**1** $u_n = \dfrac{n^2 + 3n - 2}{\sqrt{n} + 1}$.

**2** $v_n = \sqrt{\dfrac{4n+1}{n+2}}$.

**3** $w_n = \dfrac{2\sqrt{n} + n - 3}{\sqrt{n} + 1}$.

**4** $u_n = \dfrac{n + \cos(n)}{n^2}$.

## Exercice 4 :

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

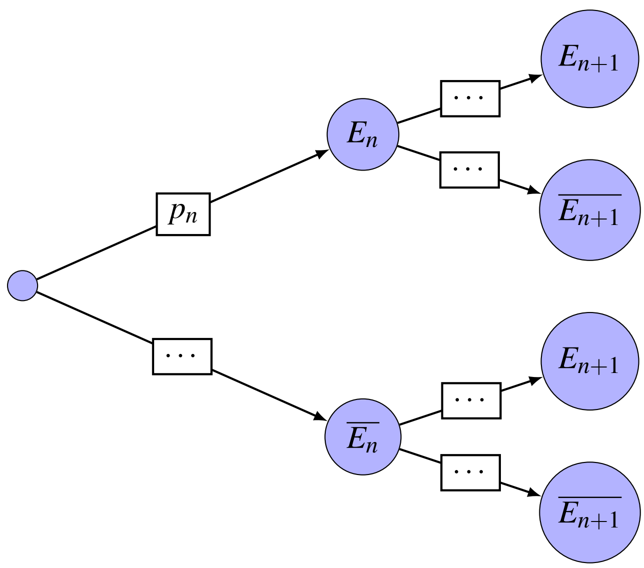
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine $n$ le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine $n$ le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, par $E_n$ l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la $n$-ième semaine ». On note $p_n$ la probabilité de l'évènement $E_n$.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

**1** (a) Déterminer la valeur de $p_3$ à l'aide d'un arbre de probabilité.

(b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

**2** (a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous




(b) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

(c) Montrer que la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison $r$.
En déduire l'expression de $u_n$ puis de $p_n$ en fonction de $n$ et $r$.

(d) En déduire la limite de la suite $(p_n)$.

## Exercice 5 :

On considère des sacs de billes $S_1$, $S_2$, $S_3$, ...tels que $S_1$ contient 3 billes jaunes et 2 billes vertes.
Chacun des sacs suivants $S_2$, $S_3$, ... contient 2 billes jaunes et 2 billes vertes.
On tire au hasard une bille de $S_1$ et on la met dans $S_2$. Puis on tire une bille de $S_2$ et on la met dans $S_3$. Et ainsi de suite Pour tout entier $n \geq 1$, on note $E_n$ l'évènement « la bille tirée dans $S_n$ est verte » et $P(E_n)$ sa probabilité.

1. Déterminer $P(E_1)$, $P_{E_1}(E_2)$, $P_{\overline{E_1}}(E_2)$ puis $P(E_2)$.
2. A l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $P(E_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$.
3. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_1 = 0,4$ et $u_n = P(E_n)$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,2u_n + 0,4$.
4. Démontrer que la suite $(u_n)$ est majorée par $0,5$.
5. Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
6. Justifier que la suite $(u_n)$ est convergente et préciser sa limite.

## Exercice 6 :

Un commerçant constate que parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90% d'entre eux achètent un melon la semaine suivante. Parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60% d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.
On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note $A_n$ l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine $n$ » et $p_n = p(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

1. Démontrer que $p_3 = 0,85$.
2. Sachant que le client achète un melon la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté la semaine 2 ?
3. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$ : $p_n > 0,8$.
5. En déduire que la suite $(p_n)$ est décroissante. La suite $(p_n)$ est-elle convergente ?
6. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$ : $v_n = p_n - 0,8$. Démontrer que $(v_n)$ est géométrique.
7. Exprimer $v_n$ puis $p_n$ en fonction de $n$. En déduire la limite de $(p_n)$.

## Exercice 7 :

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.
Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.
Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

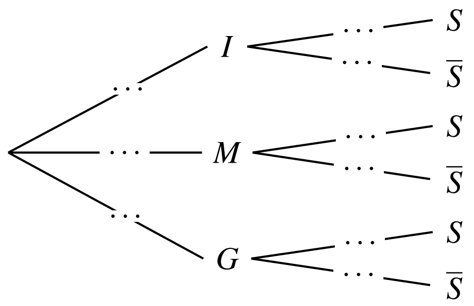
— 75 % pour les clients sur internet ;
— 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;
— 80 % pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.
On définit les évènements suivants :

— $I$ : « le client a effectué son achat sur internet » ;
— $M$ : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
— $G$ : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
— $S$ : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si $A$ est un évènement quelconque, on notera $\overline{A}$ son évènement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

**1** Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.




**2** Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

**3** Démontrer que $P(S) = 0,8$.

**4** Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à $10^{-3}$ près.

**5** Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note $X$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

(a) Justifier que $X$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) Déterminer la probabilité, arrondie à $10^{-3}$ près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

**6** En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à $0,99$.

**7** Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.
Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire $T$ égale à la somme de deux variables aléatoires $T_1$ et $T_2$.
La variable aléatoire $T_1$ modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire $T_2$ modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.
On admet que les variables aléatoires $T_1$ et $T_2$ sont indépendantes, et on donne :

— L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$ ;
— L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire $T$.

## Exercice 8 :

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ».

Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que $91,7\,\%$ des étudiants interrogés ont répondu « oui ».
Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

— $65\,\%$ des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;

— $98\,\%$ des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

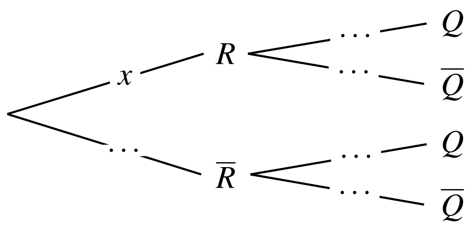
On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.
On note $R$ l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et $Q$ l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».
Pour un évènement $A$ quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire.

**Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à $10^{-3}$ près.**

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right)$.

2. On note $x$ la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.

   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.




   (b) Montrer que $x = 0,9$.

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
   Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?

4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20 . On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire $N$ qui suit la loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.
   La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
   À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que $65\,\%$ des étudiants soient récompensés ?

5. On interroge au hasard dix étudiants.
   Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.
   Soit $S$ la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.
   Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire $S$.

6. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.

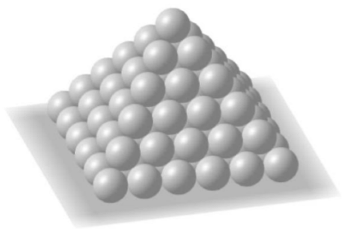
   (a) Que modélise cette variable aléatoire $M$ dans le contexte de l'exercice ?

   (b) Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.

## Exercice 9 :

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1er étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3e étage possède 9 boules ;
- …
- le $n$-ième étage possède $n^2$ boules.



Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $u_n$ le nombre de boules qui composent le $n$-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.

2. On considère la suite $(S_n)$ définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

(a) Calculer $S_5$ et interpréter ce résultat.

(b) On considère la fonction `pyramide` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python. Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul $n$, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de $n$ étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = ...
    return ...
```

(c) Vérifier que pour tout entier naturel $n$ :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

(d) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible ?

## Exercice 10 :

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Montrer que la fonction $g$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 & = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} & = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel $n$.

2. Calculer $u_1$ et $u_2$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

5. Déterminer la limite $\ell$ de la suite $(u_n)$.

## Exercice 11 :

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 0,75x(1-0,15x)$. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0,6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que la suite est bien définie.

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.

2. Montrer que la fonction $f$ est croissante sur $[0;1]$.

3. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

4. (a) Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente. On nommera $\ell$ sa limite.
   (b) On admet que $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de $\ell$.

## Exercice 12 :

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

**Partie A : Conjecture**

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | |

2. Conjecturer la limite de la suite $(u_n)$.

**Partie B : Étude d'une suite auxiliaire**

Soit $(w_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer $w_0$.

2. Démontrer que la suite $(w_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

3. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $w_n$ en fonction de $n$.

4. Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5 Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

**Partie C : Étude de la suite** $(u_n)$

1 Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2 En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.

3 On admet que la limite de la suite $(u_n)$ est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.
Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

## Exercice 13 :

Dans un cube ABCDEFGH, le point I est le milieu du segment [AE], le point J le centre du carré CDHG et les points M et N sont définis par $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, et de plus K est le milieu du segment [MN].

1 Tracer une figure et placer les points.

2 Donner les coordonnées des points I et J dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

3 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

4 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) parallèle (IJ) et passant par A.

5 Calculer les coordonnées des points M, N et K.

6 Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

7 On considère le point $L(-2;3;5)$. Les A, B, J et L sont-ils coplanaires ?

## Exercice 14 :

On considère un cube ABCDEFGH. On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

1 Tracer une figure et placer les points.

2 Donner les coordonnées des sommets du cube dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

3 (a) Calculer les coordonnées des points M, N et montrer que P a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4};1;1\right)$.

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ forment-ils une base de l'espace ?

4 (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MP).

(b) Montrer que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L dont on déterminera les coordonnées.

5 (a) On considère le point T de coordonnées $(1;1;8)$. Le point T appartient-il à la droite (MP) ?

(b) Calculer la longueur TP.

## Exercice 15 :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(0\,;\,4\,;\,-1),\quad B(6;1;5)\quad \text{et}\quad C(6\,;\,-2\,;\,-1).$$

**Affirmation 1 :** Les points A, B et C ne sont pas alignés.

**Affirmation 2 :** Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+2t \\ y & = & 3-t \\ z & = & 1+2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathscr{D}\quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 2+t \end{array}\right. \text{où } t \in \mathbb{R}\,;\quad \mathscr{D}'\quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t' \\ y & = & 4-t' \\ z & = & -1+2t' \end{array}\right. \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

**Affirmation 3 :** $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

## Exercice 16 :

On considère un tétraèdre ABCD. Les deux points I et J sont respectivement les milieux de [BC] et [CD]. Les points D' et B' sont respectivement les symétrique de A par rapport à I et J.

1. Tracer une figure et placer les points.
2. Justifier que $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace.
   Dans la suite de l'exercice, on munit l'espace du repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$
3. (a) Donner les coordonnées des points A, B. C. D. I et J.
   (b) En remarquant que $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AJ}$. Montrer que le point B' a pour coordonnées (0 ;1 ; 1).
   (c) Déterminer de même les coordonnées du point D'.
4. (a) Monter que la droite $(BB')$ admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} xx = 1-2t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases} \qquad \text{où}\ \ t \in \mathbb{R}.$$

   (b) Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$, on considère les points M(-4 :2 :8) et N(2 :0 ;-2). Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN).
5. (a) Étudier la position relative des droites (BB') et (MN).
   (b) On admettra que la droite (DD') a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2k \\ z = 1-2k \end{cases} \qquad \text{où}\ \ t \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que les droites (BB'), (MN) et (DD') sont concourantes en un point G, dont précisera les coordonnées.