Tle Spé Maths
Pour commencer

Loi binomiale

Corrigé

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1.
(a) $\dfrac{17!}{15!} = \dfrac{17\times16\times15!}{15!} = 17\times16 = 272.$

(b) $\dfrac{6!-5!}{5!} = \dfrac{6\times5!-5!}{5!} = \dfrac{5\times5!}{5!} = 5.$

(c) $\dfrac{7!\times5!}{10!} = \dfrac{7!\times5!}{10\times9\times8\times7!} = \dfrac{5\times4\times3\times2}{10\times9\times8} = \dfrac{1}{6}.$

(d) $\dfrac{9!}{6!\times3!} = \dfrac{9\times8\times7\times6!}{6!\times3\times2} = 84.$

2.
(a) $\binom{6}{2} = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} = \dfrac{6!}{4!\times2!} = \dfrac{6\times5\times4!}{4!\times2!} = 15.$

(b) $\binom{15}{4} = \dfrac{15!}{4!(15-4)!} = \dfrac{15\times14\times13\times12\times11!}{4!11!} = 1365.$

(c) $\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} = \dfrac{7\times6\times5\times4!}{3!4!} = 35.$

Exercice 2 :

On lance cinq fois de suite de façon indépendante une pièce de monnaie et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de « face » obtenu.

1. Cela revient à répéter 5 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli. De plus, La probabilité d'un succès, soit obtenir « face » est égale à $p=0,5$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,5$.

2. $p\,(X=3) = \binom{5}{3}\times0,5^3\times0,5^2 = 0,3125.$

3. $p\,(X=0) = (0,5)^5 = 0,03125.$

4. $1-p\,(X=0) = 1-0,03125 = 0,96875.$

Exercice 3 :

On lance six fois de suite un dé et on s'intéresse uniquement au fait d'obtenir « 5 ou 6 » ou « ni 5, ni 6 ». On note X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où on obtient « 5 ou 6 ».

1. Cela revient à répéter 6 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « 5 ou 6 » $(p=1/3)$; « ni 5, ni 6 » $(1-p=2/3)$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=1/3$.

2. $p\,(X=2) = \binom{6}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 \approx 0,329.$

Exercice 4 :

On considère la variable aléatoire X qui suit la loi $\mathscr{B}(20\,;\,0{,}36)$.

- $p(X>6) = 1-p(\overline{X>6}) = 1-p(X\leqslant6) = 1-0,3803147 \approx 0,62.$
- $p(3\leqslant X<12) = p(2<X\leqslant11) = p(X\leqslant11)-p(X\leqslant2) = 0,9753054-0,0009619249 \approx 0,9656861.$

Exercice 5 :

On considère la variable aléatoire Y qui suit la loi $\mathscr{B}(30\,;\,0{,}85)$.

- $p(X < 24) = p(X \leqslant 23) = 0,152581$.
- $p(12 \leqslant X < 21) = p(11 < X \leqslant 20) = p(X \leqslant 20) - p(X \leqslant 11) = 0,0096576$.

Exercice 6 :

Une urne contient des jetons noirs et des jetons blancs. Le nombre de jetons noirs est le triple du nombre de jetons blancs.

1. On tire au hasard un jeton. La probabilité que ce jeton soit noir est égale à $\dfrac{3}{4}$.

2. On tire à présent 4 jetons successivement avec remise et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de jetons noirs obtenu.

   (a) Cela revient à répéter 4 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli. La probabilité d'un succès, soit obtenir un jeton « noir » est égale à $p = 3/4$, ainsi la probabilité d'obtenir un jeton « blanc » vaut $1 - p = 1/4$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 3/4$.

   (b) $p\,(X=2) = \binom{4}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \approx 0,2109$.

   (c) $p\,(X=2) + p\,(X=3) \approx 0,2109 + \binom{4}{3} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^1 \approx 0,6328$.

   (d) $E\,(X) = n \times p = 4 \times \dfrac{3}{4} = 3$. Cela représente le nombre moyen de jetons noirs que l'on peut espérer si on répète le tirage de 4 jetons un grand nombre de fois.

Exercice 7 :

Dans une fabrication d'objets en série, 8 % de ces objets présentent un défaut. Un carton contient 10 objets. La présence d'un défaut pour un objet est indépendante de l'objet choisi.

1. Si on note X le nombre d'objets sans défaut, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,92$. Probabilité que les dix objets soient sans défaut $= p\,(X=10) = 0,92^{10} \approx 0,4344$.

2. Probabilité qu'au moins 8 objets soient sans défaut $= p\,(X=8) + p\,(X=9) + p\,(X=10) = \binom{10}{8} \times 0,92^8 \times 0,08^2 + \binom{10}{9} \times 0,92^9 \times 0,08^1 + 0,92^{10} \approx 0,9599$.

Exercice 8 :

Un vendeur est chargé de démarcher des clients au téléphone. Il téléphone à 10 personnes par jour. On admet que la probabilité qu'une personne passe commande est de $\frac{1}{15}$ et que les décisions des personnes contactées sont indépendantes. X est le nombre de personnes qui passent commande en une journée.

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{15}$.
   $p(X=k) = \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{15}\right)^k \times \left(\frac{14}{15}\right)^{10-k}$.

2. $E\,(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{15} \approx 0,667$.

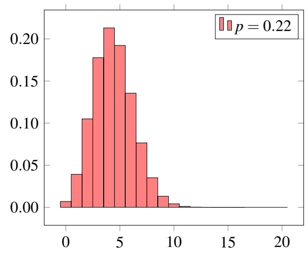
3. Gain moyen $\approx 100 \times 0,667 \approx 66,7$.

Exercice 9 :

On donne le diagramme en barres associé à la loi $\mathscr{B}(20 ; 0{,}22)$ et X suivant cette loi.

1. Le diagramme est en forme de cloche et approximativement centré sur 4,5 l'espérance de cette loi.
En effet, $E(X) = np = 20 \times 0,22 = 4,4$.

2. $V(X) = np(1-p) = 20 \times 0,22 \times 0,78 = 3,432$.

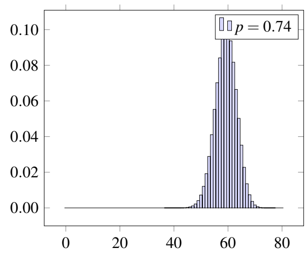


Exercice 10 :

On donne le diagramme en barres associé à une loi $\mathscr{B}(\mathrm{n} ; 0{,}74)$ et X suivant cette loi.

1. e diagramme est en forme de cloche et approximativement centré sur 59, l'espérance de cette loi.

2. On sait que $E(X) = np$.
Ainsi, $59 \approx n \times 0,74$, soit $n = 80$.



Exercice 11 :

Une troupe de théâtre joue pour la première fois et on considère que le nombre de spectateurs présents ce jour-là est donné par une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,15$.
Pour des questions logistiques, la troupe ne jouera pas s'il y a moins de dix personnes.
La troupe pourra jouer si $X \geqslant 10$. En utilisant la calculatrice, on obtient :
$p(X \geqslant 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leqslant 9) \approx 0,945$.
$p(X \geqslant 10) < 0,95$ ainsi, la troupe n'est pas « sûre » de pouvoir jouer au seuil de 95 %.

Exercice 12 :

Un restaurateur considère que son nombre quotidien de clients est donné par une variable aléatoire Y suivant la loi $\mathscr{B}(50 ; 0{,}75)$.

Le restaurateur pourra accueillir tous les clients si $Y \leq 43$. En utilisant la calculatrice on obtient :

$$p(Y \leqslant 43) \approx 0,98.$$

$p(Y \leqslant 43) > 0,95$, ainsi le restaurateur est sûr accueillir tous ses clients au seuil de 95 %.

Exercice 13 :

On considère que le nombre d'élèves dans la classe de Maria l'année prochaine est donné par une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(36 ; 0{,}92)$.

Maria aura au moins 29 élèves dans sa classe l'année prochaine si $X \geqslant 29$. En utilisant la calculatrice, on obtient :
$p(X \geqslant 29) = 1p(X < 29) = 1p(X \leqslant 28) \approx 0,993$.

$p(X \geqslant 29) > 0,99$, ainsi Maria est sûre au seuil de 99 % d'avoir au moins 29 élèves dans sa classe l'année prochaine.

Exercice 14 :

On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,36$.

1. Ici, $1 - \alpha = 0,99$ donc $\alpha = 0,01$ et $\dfrac{\alpha}{2} = 0,005$. En utilisant la calculatrice, on obtient :
   - $p(X < 16) = p(X \leqslant 15) \approx 0,0006 \leqslant 0,005$.
   - $p(X > 39) = 1p(X \leqslant 39) \approx 0,007 > 0,005$. Ainsi, $[16\,;\,39]$ n'est pas un intervalle de fluctuation centré au seuil de 99 %.

2. Ici, $1 - \alpha = 0,99$ donc $\alpha = 0,01$ et $\dfrac{\alpha}{2} = 0,005$. En utilisant la calculatrice, on obtient :
   - $p(X < 18) = p(X \leqslant 17) \approx 0,003 \leqslant 0,005$.
   - $p(X > 40) = 1p(X \leqslant 340) \approx 0,004 \leqslant 0,005$.

   Ainsi, $[18\,;\,40]$ est un intervalle de fluctuation centré au risque 1%.