Primitives & Intégration

L'essentiel : Tle Spé

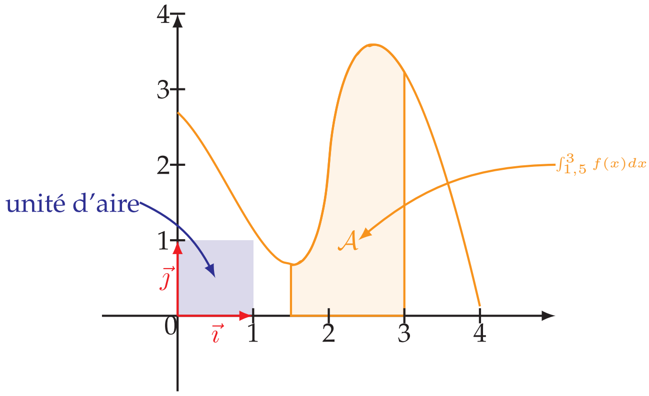
Primitives

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Les solutions de l'équation différentielle $y' = f$ sur I sont appelées les *primitives* de f.
- Il y a une infinité de primitives ; on dit qu'elles sont définies *à une constante près*. Mais dès que l'on impose une condition sur une de leurs valeurs, il n'en existe plus qu'une. Cette condition est parfois appelée *condition initiale*.
- Par exemple, la primitive G de la fonction g définie par $g(x) = \cos x$ telle que $G(\pi) = 0$ est $G(x) = \sin x$.

Intégrale

- Dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on appelle *unité d'aire* l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
- Soit f une fonction *continue* et *positive* sur un intervalle $[a\ ; b]$, et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
- L'*intégrale* de a à b de la fonction f est l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$; elle est exprimée en unité d'aire (en abrégé : ua). On la note :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx.$$



Relation de Chasles sur les intégrales

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels appartenant à I. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Calcul d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, et soit F une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Primitives usuelles

Un tableau de dérivées usuelles donne, par lecture inverse, un tableau de primitives à connaître, où $k \in \mathbb{R}$.

La fonction usuelle	Primitives
$x \mapsto 1$	$x \mapsto x + k$
$x \mapsto x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$ si $-n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ avec $x > 0$	$x \mapsto \ln x + k$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ avec $x \neq 0$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x} + k$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ avec $x > 0$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + k$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$

Primitives et fonctions composées

u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I et F une primitive de u sur I.

Fonction f	Une primitive F	Conditions
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I.
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u > 0$ sur I.
$u'e^u$	e^u	
$x \mapsto u(ax+b) \quad a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a}F(ax+b)$	

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $[a\ ;\ b]$. Alors,

$$\int_a^b u'(x) \times v(x)dx = \big[(uv)(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)dx.$$

Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. On appelle *valeur moyenne de f* le nombre μ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$