Produit scalaire & Orthogonalité dans l'espace

L'essentiel : Tle Spé

Produit scalaire dans l'espace

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Le **produit scalaire** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, est défini par :

- ✧ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle aigu ;
- ✧ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle obtus.

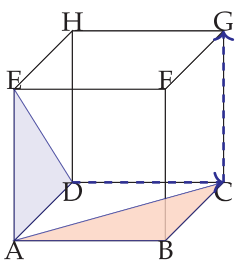
Orthogonalité

- ✧ Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- ✧ Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et soit $\vec{n}$ un vecteur de l'espace.
  On dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à $\mathcal{P}$ si, pour tout vecteur $\vec{p}$ de $\mathcal{P}$, $\vec{n} \cdot \vec{p} = 0$.
- ✧ Soient deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de l'espace.
  On dit que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont orthogonaux si tout vecteur $\vec{u_1}$ de $\mathcal{P}_1$ est orthogonal à tout vecteur $\vec{u_2}$ de $\mathcal{P}_2$.
- ✧ Soient deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de l'espace, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$.

$$\mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ sont orthogonaux} \iff \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0.$$

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH, les deux vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux.
Par ailleurs, $\overrightarrow{CG}$ est un vecteur normal à (ABC) et $\overrightarrow{DC}$ un vecteur normal à (ADE). Ainsi, les plans (ABC) et (ADE) sont perpendiculaires.



Distance entre deux points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. La distance entre A et B est donnée par l'égalité :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace :

- ✧ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$;
- ✧ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (propriété de symétrie) ;
- ✧ $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
- ✧ $\forall(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda\vec{u}) \cdot (\mu\vec{v}) = \lambda\mu(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- ✧ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$;
- ✧ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$;
- ✧ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

Produit scalaire dans un repère

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, autrement dit où $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$.

On considère deux vecteurs tels que $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,

alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Équations cartésiennes d'un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Pour tout point M du plan, on a :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{AM} . \vec{n} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & ax + by + cz + d = 0, \text{ où } d = -(ax_A + by_A + cz_A).
\end{aligned}$$

- ✧ « $ax + by + cz + d = 0$ » est appelée une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
- ✧ Pour un triplet donné $(a; b; c)$, il existe une infinité d'équations cartésiennes car $d \in \mathbb{R}$.

Distance d'un point à un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, et soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point quelconque de l'espace. La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est :

$$d\,(\mathrm{A}\,;\,\mathcal{P}) = \frac{|ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$