Équations différentielles

L'essentiel : Tle Spé

Différentielle

Une *différentielle* est, dans le vocabulaire scientifique, une dérivée. C'est la raison pour laquelle une équation où l'inconnue est une fonction qui est dérivée au moins une fois est qualifiée d'*équation différentielle*.

Solutions d'équation de type $y' = ay + b$

Soient a et b deux réels. L'équation différentielle $y' = ay+b$ admet pour solutions les fonctions y telles que :

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple : $y' = 3y + 7$

L'équation différentielle $y' = 3y + 7$ admet pour solutions :

$$y(x) = Ce^{3x} - \frac{7}{3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En effet, $y'(x) = 3Ce^{3x}$ et

$$y'(x) - 3y(x) = 3Ce^{3x} - 3\left(Ce^{3x} - \frac{7}{3}\right)$$

$$y'(x) - 3y(x) = 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} + 3 \times \frac{7}{3}$$

$$y'(x) - 3y(x) = 7.$$

Ainsi, on a bel et bien : $y' - 3y = 7$, soit $y' = 3y + 7$.

L'équation homogène associée à $y' = ay + f$

Soit f une fonction. On appelle *équation homogène associée* à l'équation $y' = ay + f$ l'équation différentielle $y' = ay$.

Solutions d'équation de type $y' = ay + f$

Si on note (E) l'équation $y' = ay + f$, on note (E_0) son équation homogène associée.

Pour résoudre l'équation $y' = ay + f$, on utilise la méthode suivante :

- **On résout d'abord (E_0).**
  On trouve les solutions de l'équation homogène associée à (E) :
  $$y_0(x) = Ce^{ax}.$$
- **On trouve une solution particulière de (E).**
  On la note par exemple u ; dans ce cas, on a :
  $$u'(x) - au(x) = f(x).$$
- **On ajoute les solutions.**
  Les solutions de (E) sont alors :
  $$y(x) = y_0(x) + u(x).$$

Solutions d'équation de type $y' = ay$

- Soit a un nombre réel. Résoudre l'équation $y' = ay$ d'inconnue y signifie trouver toutes les fonctions y dont la dérivée est égale à ay.
- L'équation :
  $$y' = ay$$
  admet pour solutions les fonctions de la forme :
  $$y(x) = Ce^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
- Il existe donc une infinité de solutions, définie à une constante C près.

Exemples : $y' = -y$ et $y' = \frac{1}{2}y$

- $y' + y = 0$ est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = -1$. En effet,
  $$y' + y = 0 \iff y' = -y.$$
  L'équation différentielle $y' = -y$ admet pour solutions :
  $$y(x) = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
  On peut facilement vérifier l'ensemble des solutions en calculant sa dérivée :
  $$y'(x) = -Ce^{-x} = -y(x).$$
- $y' = \dfrac{1}{2}y$ est aussi une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = \dfrac{1}{2}$.
  Cette équation différentielle admet pour solutions :
  $$y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple : $(E) \quad y' = -2y + x^2$.

- **On résout l'équation homogène (E_0) associée à (E).**
  (E_0) : $\quad y' = -2y$ admet pour solutions :
  $$y_0(x) = Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
- **Solution particulière de (E).**
  En Terminale, une solution particulière vous sera proposée la plupart du temps.
  On pose $y_1(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$.
  Il est assez aisé de vérifier y_1 est bel et bien une solution de (E).
- **On conclut en ajoutant les deux résultats.**
  Les solutions de (E) sont donc :
  $$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$