# Combinatoire & Dénombrements

L'essentiel : Tle Spé

## Principe additif

Soient $A$ et $B$ deux ensembles finis disjoints, c'est-à-dire n'ayant aucun élément commun, tels que $Card(A) = n$ et $Card(B) = m$. Alors, le nombre de façons de prendre un élément dans $A$ <u>ou</u> un élément dans $B$ est égal à $n + m$.

<u>Exemple :</u> Dans ma bibliothèque, il y a 20 romans et 10 bandes dessinées. Je peux donc y choisir un livre de $20 + 10 = 30$ façons différentes.

## Principe multiplicatif

Soient $A$ et $B$ deux ensembles finis tels que $Card(A) = n$ et $Card(B) = m$.

Le nombre de façons de prendre un élément dans $A$ <u>et</u> un élément dans $B$ est égal à $n \times m$.

<u>Exemple :</u> Dans ma bibliothèque, il y a 20 romans et 10 bandes dessinées. Je souhaite prendre un livre de chaque sorte. Il y a donc $20 \times 10 = 200$ possibilités.

## Permutation

Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Une *permutation* de $E$ est un ensemble composé des $n$ éléments de $E$.
- $n!$ est le nombre de **permutations** d'un ensemble contenant $n$ éléments.

<u>Exemple :</u> **Si** $E = \{1; 2; 3\}$**,** il y a alors $3! = 6$ permutations possibles de 3 éléments.

123 132 213 231 312 321

## Arrangement

Soit $n$ un entier naturel non nul, et soit $E$ un ensemble à $n$ éléments.

- Un *arrangement* de $p$ éléments de $E$ est une $p$-liste d'éléments distincts.
- Le nombre d'arrangements de $p$ éléments pris dans un ensemble à $n$ éléments est donné par :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1).$$

<u>Exemple :</u> $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.

Il y a donc 6840 podiums possibles pour une course à 20 participants.

## Combinaison

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls tels que $p \leqslant n$, et soit $E$ un ensemble à $n$ éléments.

- Une *combinaison* de $p$ éléments de $E$ est un ensemble non ordonné à $p$ éléments distincts pris parmi les $n$ éléments de $E$.
- Le nombre de combinaisons de $p$ éléments d'un ensemble $E$ à $n$ éléments est égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}.$$

<u>Exemple :</u> $\binom{32}{5} = \dfrac{32 \times 31 \times \cdots \times (32-5+1)}{5!} = 201376$

donc il y a 201376 mains de 5 cartes possibles sur un jeu de 32 cartes.

## Relation de Pascal

Pour tous entiers naturel $n$ et $p$ tels que $p \leqslant n$ et $n \neq 0$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

$$1 = \tbinom{0}{0}$$
$$1 = \tbinom{1}{0} \qquad 1 = \tbinom{1}{1}$$
$$1 = \tbinom{2}{0} \qquad 2 = \tbinom{2}{1} \qquad 1 = \tbinom{2}{2}$$
$$1 = \tbinom{3}{0} \qquad \mathbf{3} = \tbinom{3}{1} \qquad 3 = \tbinom{3}{2} \qquad 1 = \tbinom{3}{3}$$
$$1 = \tbinom{4}{0} \qquad 4 = \tbinom{4}{1} \qquad 6 = \tbinom{4}{2} \qquad 4 = \tbinom{4}{3} \qquad 1 = \tbinom{4}{4}$$

## Résumé

| | Ordre | Modèle | Exemples | Formules |
|---|---|---|---|---|
| Permutation | oui | tirage sans remise | anagramme | $n!$ |
| $p$-liste | oui | tirage avec remise | digicode | $n^p$ |
| Arrangement $A_n^p$ | oui | tirage sans remise | podium d'une course | $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ |
| Combinaison $\binom{n}{p}$ | non | tirage sans remise | main dans un jeu de cartes | $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ |

## Formule du binôme de Newton

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel $n$ et pour tout entier $k \leqslant n$, on a :

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- Cas particulier, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.