Logarithme népérien

L'essentiel : Tle Spé

Définition

On définit la fonction *logarithme népérien* comme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle, autrement dit l'unique fonction :

$$\begin{array}{rccl} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

pour laquelle,

$$\forall x > 0,\ e^{\ln x} = \ln\left(e^x\right) = x.$$

Variation de la fonction ln

✧ La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad \text{pour tout } x > 0.$$

✧ La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est strictement croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Limites du logarithme népérien

✧ $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

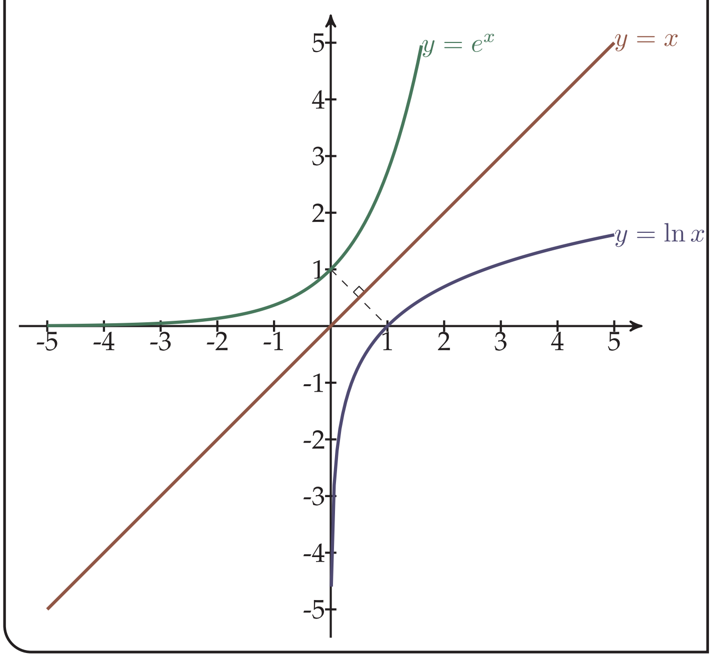
✧ $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

✧ Pour tout $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

✧ Pour tout $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = 0$.

✧ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

Courbe représentative



Exponentielle

Soient $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$y = e^x \iff x = \ln y.$$

Conservation de l'ordre

Pour tous réels x et y strictement positifs :

✧ $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$;

✧ $\ln(x) < \ln(y) \iff x < y$.

Relations fonctionnelles

Pour tous réels x et y strictement positifs, pour tout entier relatif n :

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$;
- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$;
- $\ln\left(x^n\right) = n \ln x$.

Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	||	$+$	
$\ln(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$

Dérivée de $\ln(u)$

Soit u une fonction définie et dérivable à valeurs strictement positives sur un intervalle I. Ainsi, sur I :

$$\left(\ln(u)\right)' = \frac{u'}{u}.$$

Équation de la tangente en $a > 0$

$$y = \frac{1}{a}(x-a) + \ln(a) \Leftrightarrow y = \frac{x}{a} - 1 + \ln(a).$$

Cas particuliers

✧ $\ln(1) = 0$.

✧ $\ln(e) = 1$.

✧ Pour tout $n \geqslant 1$, $10^n = e^{n\ln(10)}$.