



Exponentielle

L'essentiel : Tie Spé



L'existence & L'unicité

- Il existe une fonction f vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.
L'existence est admise au lycée, mais nous pouvons néanmoins représenter cette fonction en utilisant la méthode d'Euler.
- Il n'existe qu'une seule fonction f vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Propriété fondamentale

Soit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Nous avons alors pour tout réel x ,
 $f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$.

Propriétés

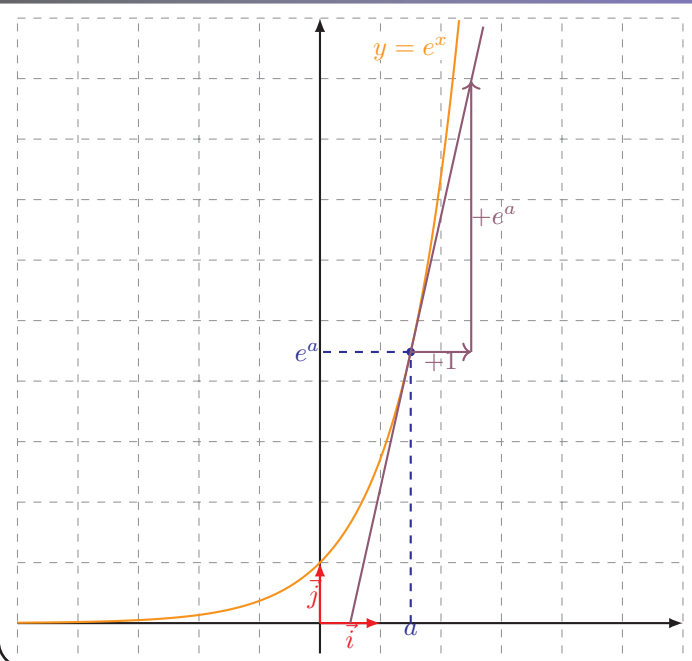
Soient x et y deux réels et n un entier naturel, on a :

- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$;
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$;
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$;
- $e^0 = 1$;
- $(e^x)^n = e^{nx}$.

Étude de la fonction $x \mapsto e^x$

- La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement positive.
- $(e^x)' = e^x$.
- La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Courbe représentative



Équation de la tangente en a

$$y = e^a(x - a) + e^a \Leftrightarrow y = e^a(x - a + 1).$$

Exponentielle

On appelle fonction exponentielle la fonction $\exp$ telle que :

$$\exp' = \exp \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1.$$

Relations fonctionnelles

- Pour tout réel x , $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
- Soient x et y deux réels, on a :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

Le nombre e

En mathématiques, il est de coutume de désigner par une lettre un nombre important dont l'écriture décimale est infinie. Tout comme le nombre transcendant π , le nombre irrationnel $\exp(1)$ est noté e .

La méthode d'Euler permet d'estimer la valeur de e .

En prenant n de plus en plus grand, le nombre $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se rapproche du nombre e .

$$e \approx 2,71828182846$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$		+	
$\exp(x)$		0 $\nearrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

Limites

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, pour tout $n \geq 1$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, pour tout $n \geq 1$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.