Dérivabilité & Convexité d'une fonction

L'essentiel : Tle Spé

Dérivabilité

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
On dit que f est *dérivable* en a si :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

est une limite réelle finie ℓ.
ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en a, et on le note $f'(a)$.
Par extension, on dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point a de I. La fonction $f'\ :\ x\mapsto f'(x)$ est alors appelée *fonction dérivée de* f.

Dérivabilité & Continuité

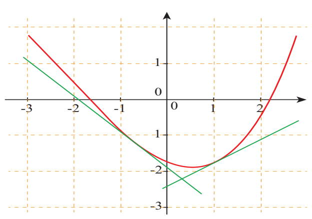
- Si f est une fonction définie et dérivable en a alors elle est continue en a.
- La réciproque de cette propriété est fausse : une fonction peut être continue sans être dérivable.

Propriétés

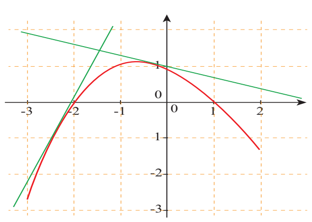
- Si f est une fonction convexe sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t\in[0;1]$ on a : $f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$.
- Si f est une fonction concave sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t\in[0;1]$ on a : $f(tx+(1-t)y)\geqslant tf(x)+(1-t)f(y)$.
- f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

Position relative de la tangente

la courbe représentative d'une fonction *convexe* sur un intervalle I sera toujours *au-dessus* de ses tangentes.



la courbe représentative d'une fonction *concave* sur un intervalle I sera toujours *en dessous* de ses tangentes.



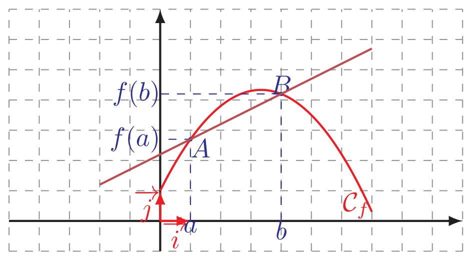
Dérivée d'une fonction composée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée	Condition
u^2	$2u'u$	
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$u(x)\neq 0$ sur I
e^u	$u'e^u$	
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x)>0$ sur I
u^n	$nu'u^{n-1}$	
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	$u(x)>0$ sur I
$\sin(u)$	$u'\times\cos(u)$	
$\cos(u)$	$-u'\times\sin(u)$	

Convexité

- f est concave sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses sécantes.



- f est convexe sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de ses sécantes.

Dérivée seconde

- On dit que f est *concave* sur un intervalle I si et seulement si $f''(x)<0$ sur I.
- On dit que f est *convexe* sur un intervalle I si et seulement si $f''(x)>0$ sur I.

Point d'inflexion

On dit que le point de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$ est un *point d'inflexion* de la courbe représentative de f si $f''(x)$ s'annule en a en changeant de signe.