Tle Spé Maths
Entraînement

Suites
Corrigés

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

$\boxed{1}$ $u_n = 3+4n$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3+4(n+1)-(3+4n) \\ &= 3+4n+4-3-4n \\ &= 4. \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n = 4$ est une constante (un nombre qui ne dépend pas de n) donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique de raison $r=4$ et de premier terme $u_0 = 3+4\times 0 = 3$.

$\boxed{2}$ $u_n = 8\times 2^n$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\cancel{8}\times 2^{n+1}}{\cancel{8}\times 2^n} \\ &= \frac{2^n\times 2^1}{2^n} \\ &= 2. \end{aligned}$$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ est une constante donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $u_0 = 8\times 2^0 = 8$.

$\boxed{3}$ $u_n = 2\times 3^{n-1}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\cancel{2}\times 3^{n}}{\cancel{2}\times 3^{n-1}} \\ &= \frac{3^{n-1}\times 3}{3^{n-1}} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Par conséquent, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $q=3$ et de premier terme $u_0 = 2\times 3^{0-1} = \dfrac{2}{3}$.

$\boxed{4}$ $u_n = \sqrt{2^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} \\ &= \sqrt{\frac{2^{n+1}}{2^n}} \\ &= \sqrt{\frac{2^n\times 2}{2^n}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc géométrique de raison $q=\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = \sqrt{2^0} = 1$.

$\boxed{5}$ $u_n = \dfrac{5}{3^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\cancel{5}}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{\cancel{5}} \\ &= \frac{3^n}{3^n\times 3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc géométrique de raison $q=\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0=\dfrac{5}{3^0}=5$.

$\boxed{6}$ $u_n=n(n+1)-n(n-1)=n^2+n-n^2+n=2n$. u_n est donc de la forme u_0+nr avec $u_0=0$ et $r=2$. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme $u_0=0$.

$\boxed{7}$ $u_n=n^2+2n+1=(n+1)^2$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=(n+2)^2-(n+1)^2\\&=(n+2-n-1)(n+2+n+1)\\&=2n+3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}\\&=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\\&=\left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^2\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2.\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1}-u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

$\boxed{8}$ $u_n=\dfrac{1}{3^n}+1$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{1}{3^{n+1}}+1-\frac{1}{3^n}-1\\&=\frac{1}{3^n\times 3}-\frac{1}{3^n}\\&=\frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{3}-1\right)\\&=-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3^n}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\frac{\frac{1}{3^{n+1}}+1}{\frac{1}{3^n}+1}\\&=\frac{\frac{1+3^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{1+3^n}{3^n}}\\&=\frac{1+3^{n+1}}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{1+3^n}\\&=\frac{1+3^{n+1}}{3(1+3^n)}.\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1}-u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

$\boxed{9}$ $u_n = 2^n + 1$. On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1} + 1 - 2^n - 1 \\ &= 2^n \times 2 - 2^n \\ &= 2^n(2-1) \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}.$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

$\boxed{10}$ $u_n = \dfrac{\sqrt{2^n}}{3^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{\sqrt{2^n}} \\ &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} \times \frac{3^n}{3^{n+1}} \\ &= \sqrt{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

Exercice 2 :

$\boxed{1}$ $u_{n+1} = 3u_n$, $u_0 = 1$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$.

$\boxed{2}$ $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}$, $u_0 = 1$. Pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{1-u_n^2}{u_n} \neq \mathrm{c}^{\mathrm{te}} \text{ (constante)}.$$

Ainsi, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n^2} \neq \mathrm{c}^{\mathrm{te}}.$$

Donc, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas géométrique.

$\boxed{3}$ $u_n = 2u_{n-1}$, $u_0 = 1$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_n = qu_{n-1}$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.

$\boxed{4}$ $u_{n+1} = u_n - \pi$, $u_0 = 2\pi$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = \pi$.

5 $u_{n+1}=3(u_n-1)-2(u_n+1)=u_n-5$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1}=u_n+r$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $r=-5$.

6 $u_n=\dfrac{u_{n-1}}{2}=\dfrac{1}{2}u_{n-1}$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_n=qu_{n-1}$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$.

7 $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$, $u_0=2$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n}-\left(\sqrt{u_n}\right)^2=\sqrt{u_n}\left(1-\sqrt{u_n}\right)\neq \mathrm{c}^{\mathrm{te}}.$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{u_n}}{u_n}=\frac{1}{\sqrt{u_n}}\neq \mathrm{c}^{\mathrm{te}}.$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas géométrique.

8 $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$, $u_0=1$. La relation de récurrence de cette suite est la même que dans la question précédente. Cependant, le premier terme change.
On a ici : $u_0=1$, $u_1=\sqrt{1}=1$, etc.
Ainsi, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante. On peut alors dire qu'elle est arithmétique (de raison $r=0$) et géométrique (de raison $q=1$).

Exercice 3 :

1 $u_0=3$ et $u_8=7$. Calculer r.
On sait que :

$$u_n=u_0+nr$$

donc :

$$\begin{aligned} u_8&=u_0+8r\\ 7&=3+8r\\ 7-3&=8r\\ \\ r&=\frac{4}{8}\\ r&=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2 $u_2=5$ et $u_5=2$. Calculer r.
On sait que :

$$u_n=u_k+(n-k)r$$

donc

$$\begin{aligned} u_5&=u_2+(5-2)r\\ 2&=5+3r\\ 2-5&=3r\\ 3r&=-3\\ r&=-1. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $u_0 = 5$ et $r = -\frac{1}{2}$. Calculer u_9.
On sait que :

$$u_n = u_0 + nr$$

donc

$$\begin{aligned} u_9 &= u_0 + 9r \\ u_9 &= 5 - \frac{9}{2} \\ u_9 &= \frac{10}{2} - \frac{9}{2} \\ u_9 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ $u_5 = 6$ et $r = 2$. Calculer u_{20}.
On sait que :

$$u_n = u_k + (n-k)r$$

donc

$$\begin{aligned} u_{20} &= u_5 + (20-5)r \\ u_{20} &= 6 + 15 \times 2 \\ u_{20} &= 6 + 30 \\ u_{20} &= 36. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ $u_7 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{7}$. Calculer r.
On sait que :

$$u_n = u_k + (n-k)r$$

donc

$$\begin{aligned} u_7 &= u_2 + (7-2)r \\ \sqrt{2} &= \sqrt{7} + 5r \\ 5r &= \sqrt{2} - \sqrt{7} \\ r &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{7}}{5}. \end{aligned}$$

Exercice 4 :

$\boxed{1}$ Si $u_0 = 5$ et $r = 3$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.
(u_n) est une suite arithmétique donc :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1).$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} &= \frac{5 + (5 + 100 \times 3)}{2} \times 101 \\ &= 155 \times 101 \\ u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} &= 15\,655. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Si $u_0 = 3$ et $u_{50} = 60$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} &= \frac{3+60}{2} \times 51 \\ &= 31,5 \times 51 \\ u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} &= 1\,606{,}5. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Si $u_1 = 60$ et $r = 5$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 \\ &= \frac{60 + (60 + 5 \times 99)}{2} \times 100 \\ &= \frac{61\,500}{2} \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= 30\,750. \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Si $u_1 = 50$ et $u_{50} = 1$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{50} &= \frac{u_1 + u_{50}}{2} \times 50 \\ &= \frac{50+1}{2} \times 50 \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_{50} &= 1\,275. \end{aligned}$$

Exercice 5 :

$\boxed{1}$ $u_0 = 5$ et $u_2 = 12$. Calculer q.
On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 \times q^2 \\ 12 &= 5 \times q^2 \\ q^2 &= \frac{12}{5} \\ q &= \sqrt{\frac{12}{5}} \qquad \text{ou} \qquad q = -\sqrt{\frac{12}{5}}. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $u_0 = 3$ et $q = 2$. Calculer u_9.
On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$\begin{aligned} u_9 &= u_0 \times q^9 \\ u_9 &= 3 \times 2^9 \\ u_9 &= 1\,536. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $u_2 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_8.

On sait que :

$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

donc

$$u_8 = u_2 \times q^{8-2}$$
$$u_8 = 8 \times 2^{-6}$$
$$u_8 = 2^{-3}.$$

4 $u_0 = 2$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer u_{10}.
On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$u_{10} = u_0 \times q^{10}$$
$$u_{10} = 2 \times 3^{-10}$$
$$u_{10} = \frac{2}{3^{10}}.$$

5 $u_5 = 2$ et $q = \sqrt{2}$. Calculer u_7.
On sait que :

$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

donc

$$u_7 = u_5 \times q^{7-5}$$
$$u_7 = 2 \times \sqrt{2}^2$$
$$u_7 = 4.$$

Exercice 6 :

1 Si $u_0 = 1$ et $q = 2$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.
(u_n) est une suite géométrique donc :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Dès lors,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} = \frac{1 - 2^{101}}{1 - 2}$$
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} = 2^{101} - 1.$$

2 Si $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} &= 3 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{51}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3\left(1 - \frac{1}{2^{51}}\right) \times 2 \\ u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} &= 6\left(1 - \frac{1}{2^{51}}\right). \end{aligned}$$

3 Si $u_1 = 60$ et $q = \dfrac{1}{3}$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= u_1 \times \frac{1-q^{100}}{1-q} \\ &= 60 \times \frac{1 - \frac{1}{3^{100}}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 60\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right) \times \frac{3}{2} \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= 45\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right). \end{aligned}$$

4 Si $u_1 = 50$ et $q = 10$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{50} &= 50 \times \frac{1 - 10^{50}}{1 - 10} \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_5 &= \frac{50}{9}\left(10^{50} - 1\right). \end{aligned}$$

Exercice 7 :

1 $u_n = \dfrac{2^n}{5}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{5} - \frac{2^n}{5} = \frac{2^{n+1} - 2^n}{5} \\ &= \frac{2^n \times 2^1 - 2^n \times 1}{5} = \frac{2^n(2^1 - 1)}{5} \\ &= \frac{2^n}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n > 0$.

2 $u_n = \dfrac{2^n}{5}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{5} - \frac{2^n}{5} = \frac{2^{n+1} - 2^n}{5} \\ &= \frac{2^n \times 2^1 - 2^n \times 1}{5} = \frac{2^n(2^1 - 1)}{5} \\ &= \frac{2^n}{5} \\ u_{n+1} - u_n &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est croissante.

3 $u_n = -n^2 + 5n - 2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -(n+1)^2 + 5(n+1) - 2 - (-n^2 + 5n - 2) \\ &= -(n^2 + 2n + 1) + 5n + 5 - 2 + n^2 - 5n + 2 \\ &= -n^2 - 2n - 1 + 5n + 5 - 2 + n^2 - 5n + 2 \\ &= -2n + 4. \end{aligned}$$

$-2n+4>0 \iff -2n>-4 \iff n<2$ donc $u_{n+1}-u_n<0$ pour $n \geqslant 2$.
La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 2.

4 $u_n=\sqrt{n^2+3}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \sqrt{(n+1)^2+3}-\sqrt{n^2+3} \\ &= \sqrt{n^2+2n+4}-\sqrt{n^2+3}. \end{aligned}$$

Or, $n^2+4>n^2+3$ donc $n^2+2n+4>n^2+3$ (car $n \geqslant 0$), donc $u_{n+1}-u_n>0$.
Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

5 $u_0=3$ et $u_{n+1}=u_n-5$.
$u_{n+1}-u_n=u_n-5-u_n=-5<0$ donc (u_n) est décroissante.

Exercice 8 :

On définit la suite (u_n) par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$.

1 On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+1}-\frac{2n+1}{n+2} \\ &= \frac{2n+3}{n+3}-\frac{2n+1}{n+2} \\ &= \frac{(2n+3)(n+2)}{(n+3)(n+2)}-\frac{(2n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{3}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

$n+2>0$ et $n+3>0$ car $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1}-u_n>0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

2 Si la suite (u_n) est majorée par 2, alors $u_n<2$ donc $u_n-2<0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n-2 &= \frac{2n+1}{n+2}-2 \\ &= \frac{2n+1}{n+2}-\frac{2(n+2)}{n+2} \\ &= \frac{2n+1-2n-4}{n+2} \\ &= \frac{-3}{n+2}. \end{aligned}$$

$-3<0$ et $n+2>0$ donc $u_n-2<0$, soit $u_n<2$.

Donc la suite est majorée par 2.

3 La suite est croissante donc, nécessairement, $u_n \geqslant u_0$ pour tout entier naturel n, soit $u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

La suite est donc minorée par $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 9 :

La suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+1}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

est croissante. En effet, on calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n^2+1} - u_n \\ &= \frac{\left(\sqrt{u_n^2+1} - u_n\right)\left(\sqrt{u_n^2+1} + u_n\right)}{\sqrt{u_n^2+1} + u_n} \\ &= \frac{u_n^2+1-u_n^2}{\sqrt{u_n^2+1} + u_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u_n^2+1} + u_n}. \end{aligned}$$

$u_n > 0$ car chaque terme est défini comme étant égal à une racine carrée.
De plus, $\sqrt{u_n^2+1} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite est donc croissante.

Exercice 10 :

On définit la suite (u_n) par la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1.
$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

2. $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$.
Or, $n+2 > n$ donc $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$ et donc, en ajoutant $\sqrt{n+1}$ aux deux membres de cette dernière inégalité, on a $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.
En inversant, on obtient : $\dfrac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ (attention à ne pas oublier d'inverser le signe de l'inégalité).
Ceci nous dit alors que $u_{n+1} < u_n$, et donc que (u_n) est décroissante.

3. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$ donc $u_n > 0$.
(u_n) est donc minorée par 0.
De plus, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geqslant 1$ (car $\sqrt{n+1} \geqslant 1$ et $\sqrt{n} \geqslant 0$) donc $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \leqslant 1$, soit $u_n \leqslant 1$.
(u_n) est donc majorée par 1.

Exercice 11 :

On considère la propriété « $3^n \geqslant 1+2n$ » dont on souhaite démontrer qu'elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

1. Lorsque $n=0$, $3^0=1$ et $1+2\times 0=1$. De plus, $3^0 \geqslant +2\times 0$, ainsi la propriété est initialisée.

2. Dans cette question, on décompose le travail à faire au brouillon pour justifier l'hérédité.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $3^n \geqslant 1+2n$.
   (b) La propriété au rang $n+1$: $3^{n+1} \geqslant 1+2(n+1) \Leftrightarrow 3^{n+1} \geqslant 2n+3$.
   (c) $3\times 3^n \geqslant 3(1+2n) \Leftrightarrow 3\times 3^n \geqslant 3+6n$.
   (d) Pour tout $n \geqslant 0$, $6n \geqslant 2n$. Ceci entraine, $6n+3 \geqslant 2n+3$

3. Conclusion : Pour tout entier naturel n, $3^n \geqslant 1+2n$.

Exercice 12 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On veut montrer que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout $n \geqslant 0$.

— On considère la propriété : « $\mathscr{P}(n)$: $\;2 \leqslant u_n \leqslant 5$ ».

— Initialisation : Pour $n=0$, on a $u_0=5$. Donc $2 \leqslant u_0 \leqslant 5$: la propriété est vraie pour $n=0$.

— Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$.
Supposons donc que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$, on a alors :

$$2 \leqslant u_n \leqslant 5$$
$$1 \leqslant \frac{1}{2}u_n \leqslant 2{,}5$$
$$2 \leqslant \frac{1}{2}u_n+1 \leqslant 3{,}5.$$

On en déduit que $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire ; par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 13 :

On considère la suite (w_n) définie par $w_0=0$ et $w_n=-\dfrac{1}{3}w_{n-1}+4$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

— On considère la propriété : « $\mathscr{P}(n)$: $\;1 \leqslant w_n \leqslant 4$ ».

— Initialisation : Pour $n=1$, on a $w_1=-\dfrac{1}{3}w_0+4=4$. Donc $1 \leqslant w_1 \leqslant 4$: la propriété est vraie pour $n=1$.

— Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$.
Supposons donc que $1 \leqslant w_n \leqslant 4$, on a alors :

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{3}w_n \leqslant \frac{4}{3}$$
$$-\frac{4}{3} \leqslant -\frac{1}{3}w_n \leqslant -\frac{1}{3}$$
$$4-\frac{4}{3} \leqslant 4-\frac{1}{3}w_n \leqslant 4-\frac{1}{3}$$
$$1 < \frac{8}{3} \leqslant 4-\frac{1}{3}w_n \leqslant \frac{11}{3} < 4$$

On en déduit que $1 \leqslant w_{n+1} \leqslant 4$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n=1$ et est héréditaire ; par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$ c'est-à-dire que $1 \leqslant w_n \leqslant 4$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 14 :

$\boxed{1}$ $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

$\boxed{2}$

— On considère la propriété : « $\mathscr{P}(n) : \quad 3^n \leqslant n!$ ».

— Initialisation : Pour $n=7$, on a $7! = 5\ 040$ et $3^7 = 2\ 187$. Donc $3^7 \leqslant 7!$: la propriété est vraie pour $n=7$.

— Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 7$ alors elle est vraie au rang $n+1$.
Supposons donc que $3^n \leqslant n!$, on a alors :

$$3 \times 3^n \leqslant 3 \times n!$$
$$3^{n+1} \leqslant 3 \times n! \leqslant (n+1) \times n!$$

On en déduit que $3^{n+1} \leqslant (n+1)!$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n=7$ et est héréditaire ; par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 7$ c'est-à-dire que $3^n \leqslant n!$ pour tout $n \geqslant 1$.

$\boxed{3}$

— On considère la propriété : « $\mathscr{P}(n) : \quad n! \leqslant n^n$ ».

— Initialisation : Pour $n=1$, on a $1! = 1$ et $1^1 = 1$. Donc $1^1 \leqslant 1!$: la propriété est vraie pour $n=1$.

— Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 1$ alors elle est vraie au rang $n+1$.
Supposons donc que $n! \leqslant n^n$, on a alors :

$$(n+1) \times n! \leqslant (n+1) \times n^n$$
$$(n+1)! \leqslant (n+1) \times (n+1)^n$$

On en déduit que $(n+1)! \leqslant (n+1)^{n+1}$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n=1$ et est héréditaire ; par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$ c'est-à-dire que $n! \leqslant n^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 15 :

— On considère la propriété : « $\mathscr{P}(n) : \quad 3 \mid 4^n - 1$ ».

— Initialisation : Pour $n=0$, on a $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $3 \mid 4^0 - 1$. Donc, la propriété est vraie pour $n=0$.

— Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$.
Supposons donc que $3 \mid 4^n - 1$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \times 4^n - 4 + 3 \\ &= 4(4^n - 1) + 3 \end{aligned}$$

On en déduit que $3 \mid 4^{n+1} - 1$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire ; par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire que $3 \mid 4^n - 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 16 :

On considère la propriété « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ » dont on souhaite démontrer qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

1 $\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1)$.

2 — On considère la propriété : « $\mathscr{P}(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

— Initialisation : Pour $n=1$, on a $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc, la propriété est vraie pour $n=1$.

— Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 1$ alors elle est vraie au rang $n+1$.

Supposons donc que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) &= 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

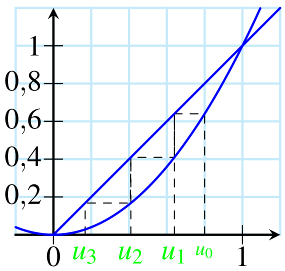
On en déduit que la propriété est vraie au rang $n+1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n=1$ et est héréditaire ; par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$ c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 17 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}8$ et $u_{n+1} = (u_n)^2$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
On donne ci-dessous la courbe de la fonction carrée et la droite d'équation $y = x$:

1 On constate ci-dessous que la suite semble décroissante :



2 Montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

— On considère la propriété : « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

— Initialisation : Pour $n=0$, on a $u_0 = 0{,}8$ et $u_1 = 0{,}64$. On a $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$: la propriété est vraie pour $n=0$.

— Hérédité : On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$.

Supposons donc que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, on a alors :

$$\begin{array}{cl}
0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n & \\
0^2 \leqslant u_{n+1}^2 \leqslant u_n^2 & \text{car la fonction carrée} \\
0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} & \text{est croissante sur } \mathbb{R}^+
\end{array}$$

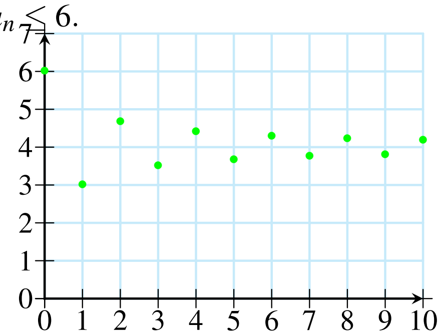
On en déduit que $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Comme $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est décroissante.

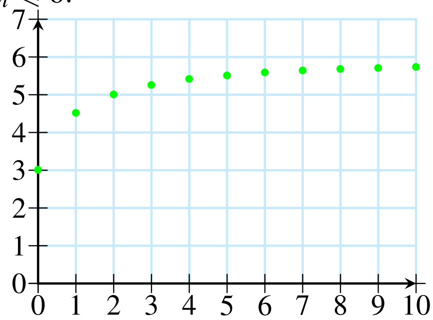
Exercice 18 :

Pour chacune des suites représentées graphiquement ci-dessous, conjecturer un majorant, un minorant ou un encadrement.

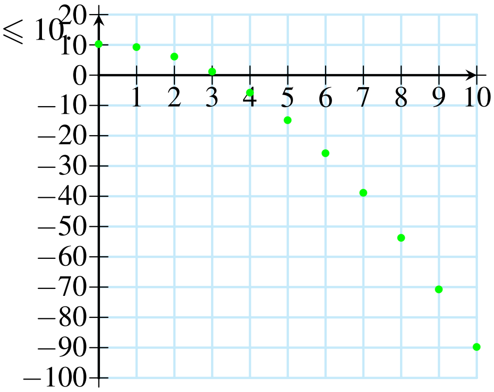
1 $3 \leqslant u_n \leqslant 6$.



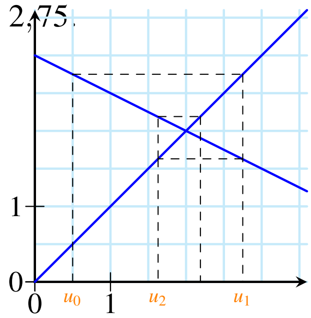
2 $3 \leqslant u_n \leqslant 6$.



3 $u_n \leqslant 10$.



4 $0,1 \leqslant u_n \leqslant 2,75$.



Exercice 19 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 - 4$.

1 Soit A un réel strictement positif,

$$\begin{aligned} u_n > A &\Leftrightarrow n^2 - 4 > A \\ &\Leftrightarrow n^2 > A + 4 \\ &\Leftrightarrow n > \sqrt{A+4} \quad \text{car, la fonction} x \longrightarrow \sqrt{x} \text{ est croissante.} \end{aligned}$$

Posons, $n_0 = E(\sqrt{A+4}) + 1$, avec $E(x)$ la partie entière de x, soit le plus grand entier inférieur à x. Ainsi, n_0 est le plus petit entier naturel tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.

2 Pour tout réel $A > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in]A; +\infty[$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 20 :

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 5 + \dfrac{1}{n}$.

1. Pour tous réels positifs a et b,

$$\begin{aligned} 5-a<v_n<5+b &\Leftrightarrow -a<v_n-5<b \\ &\Leftrightarrow -a<\frac{1}{n}<b \\ &\Leftrightarrow n>\frac{1}{b} \quad \text{car, la fonction} x \longrightarrow \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0;+\infty[. \end{aligned}$$

Posons, $n_0 = E\left(\frac{1}{b}\right)+1$, avec $E(x)$ la partie entière de x, soit le plus grand entier inférieur à x. Ainsi, n_0 est le plus petit entier naturel tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $5-a<v_n<5+b$.

2. Pour tous réels positifs a et b, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \in]5-a;5+b[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 5$.

Exercice 21 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=-1$ et $u_{n+1}=3u_n+1$.

1. En utilisant la calculatrice, on obtient :
$u_1=-2$;
$u_2=-5$;
$u_3=-14$;
$u_4=-41$;
$u_5=-122$;
$u_6=-365$;
$u_7=-1094$;
$u_8=-3281$.
On peut alors conjecturer la limite de la suite (u_n) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

2. Selon la calculatrice, $u_n<-10\,000$, à partir du rang $n=10$.

Exercice 22 :

Soit (v_n) la suite définie par $v_0=-1$ et $v_{n+1}=2v_n+7$.

1. n utilisant la calculatrice, on obtient :
$v_1=-1$;
$v_2=-5$;
$v_3=17$;
$v_4=41$;
$v_5=89$;
$v_6=377$;
$v_7=761$;
$v_8=1529$.
On peut alors conjecturer la limite de la suite (v_n) : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

2. Selon la calculatrice, $v_n>10\,000$, à partir du rang $n=11$.

Exercice 23 :

Donner un minorant et/ou un majorant évident de la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

1. $u_n=3+5n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 3$.

$\boxed{2}$ $u_n = 5+\dfrac{1}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\;5 \leqslant u_n \leqslant 6$.

$\boxed{3}$ $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\;-2 \geqslant u_n \geqslant -3$.

$\boxed{4}$ $u_n = 4(-1)^n + \dfrac{1}{4}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\;-4+\dfrac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant 4+\dfrac{1}{4}$.

$\boxed{5}$ $u_n = 1-\dfrac{2}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\;u_n \leqslant 1$.

$\boxed{6}$ $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right) - 4$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\;-5 \leqslant u_n \leqslant -3$.

$\boxed{7}$ $u_n = n+(-1)^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\;n-1 \leqslant u_n \leqslant n+1$.

Exercice 24 :

$\boxed{1}$

(a) La fonction $f : x \mapsto x^2-4x+6$ est minorée par l'ordonnée du sommet de sa parabole soit $f\left(-\dfrac{-4}{2}\right) = f(2) = 2$ donc la suite de terme général n^2-4n+6 est minorée par 2.

(b) De même, la suite de terme général $-3n^2+9n-4$ est majorée par 2,75.

(c) Par inégalités successives, on a $\dfrac{n^2-1}{n+1} \leqslant \dfrac{n^2+\cos(n)}{n+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n-1)(n+1)}{n+1} \leqslant \dfrac{n^2+\cos(n)}{n+1}$

$\Leftrightarrow n-1 \leqslant \dfrac{n^2+\cos(n)}{n+1}$. Or $-1 \leqslant n-1$ pour $n \in \mathbb{N}$ donc $-1 \leqslant \dfrac{n^2+\cos(n)}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite est minorée par -1.

(d)
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $8n+1>0$ et $n+5>0$ donc $\dfrac{8n+1}{n+5} > 0$: la suite est minorée par 0.
- $\dfrac{8n+1}{n+5} - 8 = \dfrac{-39}{n+5} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  On en déduit que $\dfrac{8n+1}{n+5} < 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ autrement dit, que la suite est majorée par 8.

(e)
- $\dfrac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2} - (-1) = \dfrac{n+3}{n^2+3n+2} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\dfrac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2} > -1$: la suite est minorée par -1.
- $\dfrac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-3n^2-7n}{2(n^2+3n+2)} < 0$ $\dfrac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2} < \dfrac{1}{2}$: la suite est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{2}$ Montrons que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout $n \geqslant 0$.

- On considère la propriété : « $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ ».
- Initialisation : Pour $n=0$, on a $u_0 = 5$.

  $2 \leqslant u_0 \leqslant 5$: la propriété est vraie pour $n=0$.
- Hérédité :

  Supposons que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$:

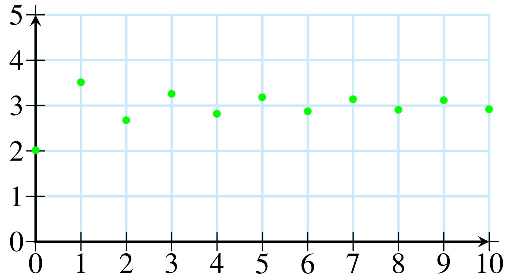
$$\begin{array}{cc} 2 \leqslant u_n \leqslant 5 & 1 \leqslant u_n - 1 \leqslant 4 \\ 1 \leqslant \sqrt{u_n-1} \leqslant 2 & 2 \leqslant 2\sqrt{u_n-1} \leqslant 4 \end{array}$$

  On en déduit que $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout $n \geqslant 0$.

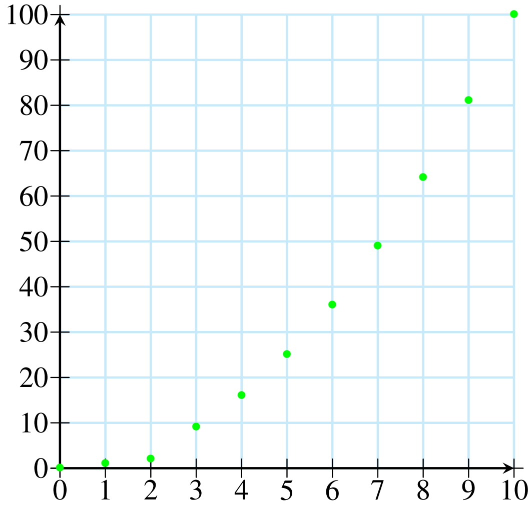
Exercice 25 :

Pour chacune des suites représentées ci-dessous, dire quelle semble être sa limite quand n tend vers $+\infty$.

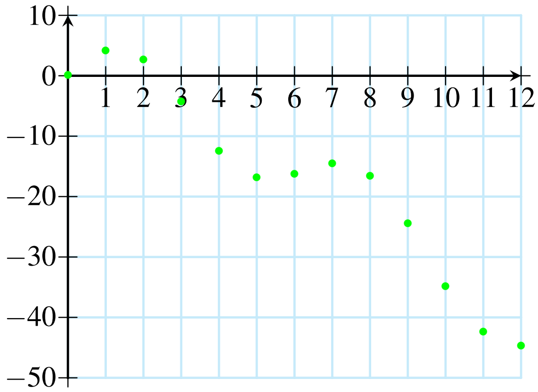
1 $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3.$



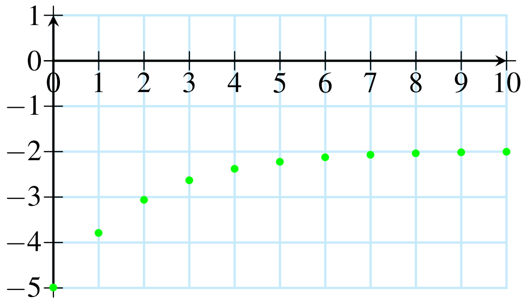
2 $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$



3 $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty.$



4 $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2.$



Exercice 26 :

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+3=+\infty$.

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} -n+6=-\infty$.

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$.

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 6-n^2=-\infty$.

$\boxed{5}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\sqrt{n}=+\infty$.

$\boxed{6}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+3}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(n+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}=+\infty$, car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Exercice 27 :

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}=0$.

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n+2}{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(6+\frac{2}{n})}{n(2+\frac{1}{n})}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{6+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\dfrac{6}{2}=3$, car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{10n+5}{-5n+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(10+\frac{5}{n})}{n(-5+\frac{2}{n})}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{10+\frac{5}{n}}{-5+\frac{2}{n}}=\dfrac{-10}{5}=-2$, car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 6+\dfrac{5}{\sqrt{n}}=6$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$.

Exercice 28 :

$\boxed{1}$ $11>1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 11^n=+\infty$.

$\boxed{2}$ $1,1>1$ et $-2<0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -2(1,1)^n=-\infty$.

$\boxed{3}$ $-1<\dfrac{-1}{2}<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+8=8$.

$\boxed{4}$ $0,99<1$ et $3>0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\times 0,99^{n+1}=0$.

$\boxed{5}$ On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n=\lim\limits_{n\to+\infty} n^7=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Ainsi, par addition on obtient, $\lim_{n\to+\infty} 6n^7+\dfrac{3}{n}=+\infty$.

Et par multiplication on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} 6n^8+3n=\lim\limits_{n\to+\infty} n(6n^7+\dfrac{3}{n})=+\infty$.

$\boxed{6}$ On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^6=\lim\limits_{n\to+\infty} n^4=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^4}=0$.

Ainsi, par addition on obtient, $\lim_{n\to+\infty} 2n^2+3-\dfrac{5}{n^4}=+\infty$.

Et par multiplication on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^6+3n^4-5=\lim\limits_{n\to+\infty} n^4(2n^2+3-\dfrac{5}{n^4})=+\infty$.

$\boxed{7}$ Par multiplication, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty}(6n^8+3n)(2n^6+3n^4-5)=+\infty$.

$\boxed{8}$ Par multiplication, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3\sqrt{n} = -\infty$. En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

$\boxed{9}$ $3 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n + 8 = +\infty$.

$\boxed{10}$ Par multiplication, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{0{,}5^n}{n} = 0$. Car, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$.

$\boxed{11}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} -2^n - 5n^2 = -\infty$

$\boxed{12}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5}^{2n-1} = +\infty$

$\boxed{13}$ Par quotient, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8-\pi^n}{4+\dfrac{3}{n}} = -\infty$. En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} 8-\pi^n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4+\dfrac{3}{n} = 4$.

Exercice 29 :

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 2n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1-\dfrac{2}{n}\right) = +\infty$.

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3 + 5n^2 + 6n - 1 = -\infty$.

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 3n^4 + 2n^2 - 5n + 2 = -\infty$.

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2-7n+2)(n^3-8n+1) = +\infty$.

$\boxed{5}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2+3n+5}{-2n^2+5n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2\left(6+\dfrac{3n}{n^2}+\dfrac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(-2+\dfrac{5n}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{-2+\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{n^2}}$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2+3n+5}{-2n^2+5n-1} = -3$.

$\boxed{6}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9n^7-5n^4+n}{n^2+1} = +\infty$.

$\boxed{7}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2+4n-2}{8n^3+7n^2-4n+7} = 0$.

Exercice 30 :

$\boxed{1}$ Par encadrements successifs, on a $-\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n^2} = 0$ par le théorème des gendarmes.

$\boxed{2}$ Par inégalités successives, on a $n^3 - 3 \leqslant n^3 + 3\sin(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 + 3\sin(n) = +\infty$ par comparaison.

$\boxed{3}$ Par inégalités successives, on a $-5n^4 + 2n^4\sin(\sqrt{n}) \leqslant -5n^4 + 2n^4 = -3n^4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^4 = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n^4 + 2n^4\sin\left(\sqrt{n}\right) = -\infty$ par comparaison.

$\boxed{4}$ De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 - n^3\cos\left(n^5\right) = +\infty$ par comparaison.

$\boxed{5}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ par le théorème des gendarmes (idem question 1).

$\boxed{6}$ Par inégalités successives, on a $n^2 - 2n \leqslant n^2 + \left(\sin\left(n^3\right) + \cos\left(n^2\right)\right) n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 2n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \left(\sin\left(n^3\right) + \cos\left(n^2\right)\right) n = +\infty$ par comparaison.

$\boxed{7}$ Par encadrements successifs, on a $2 \times 0{,}7^n \leqslant (3 + (-1)^n)\, 0{,}7^n \leqslant 4 \times 0{,}7^n$.
De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 \times 0{,}7^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 \times 0{,}7^n = 0$ car $-1 < 0{,}7 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (3 + (-1)^n)\, 0{,}7^n = 0$ par le théorème des gendarmes.

Exercice 31 :

$\boxed{1}$ (a) Justifier que $\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}$.

$\boxed{2}$ Déterminer les limites suivantes par comparaison après avoir trouvé une inégalité pertinente :

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^4$.

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{6n+5}$.

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2n+3}$.

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^3+1}$.

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} -(n+5)^3$.

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+2)^n$.

Exercice 32 :

$\boxed{1}$ On veut montrer que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

— On considère la propriété : « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

— Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 3{,}6$.
On a $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

— Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$.
Supposons donc que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, on a alors :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \\ 1 &\leqslant u_{n+1} + 1 \leqslant u_n + 1 \\ 1^2 &\leqslant (u_{n+1}+1)^2 \leqslant (u_n+1)^2 \\ \frac{1}{10} &\leqslant \frac{1}{10}(u_{n+1}+1)^2 \leqslant \frac{1}{10}(u_n+1)^2 \end{aligned}$$

car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit que $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.

— La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

$\boxed{2}$ Comme $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est décroissante.

— De plus, $0 \leqslant u_n$, c'est-à-dire que la suite est minorée par 0.

La suite (u_n) est décroissante et minorée : elle est convergente.

$\boxed{3}$ $\ell = \dfrac{1}{10}(\ell+1)^2 \Leftrightarrow 10\ell = \ell^2 + 2\ell + 1$
$\Leftrightarrow \ell^2 - 8\ell + 1 = 0$.
Cette équation résolue, on trouve deux solutions :
$\ell_1 = 4 - \sqrt{15} \approx 0{,}13$ et $\ell_1 = 4 + \sqrt{15} \approx 7{,}87$.
Comme on admet d'après l'énoncé que $\ell \leqslant 5$, on en déduit que la limite de la suite est $4 - \sqrt{15}$.

Exercice 33 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{12} \right\}$ par $f(x) = \dfrac{-60x+68}{-12x+5}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que si $x \in [2\,;4]$ alors $f(x) \in [2\,;4]$.
3. En déduire que (u_n) est bornée par 2 et 4.
4. (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{12u_n^2 - 65u_n + 68}{-12u_n + 5}$.

   (b) Dresser le tableau de signe de $\dfrac{12x^2 - 65x + 68}{-12x+5}$.

   (c) En déduire que (u_n) est croissante.
5. Que peut-on en déduire sur le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 34 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équation $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 4$.

   (b) Sans calcul, placer les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

   (c) Conjecturer une minoration, une majoration et les variations de (u_n).
2. Démontrer ces conjectures.
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 35 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
2. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1.
3. En déduire que la suite (un) est convergente, sans utiliser les propriétés sur les opérations des limites.

Exercice 36 :

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est strictement croissante.
2. Montrer que la suite (v_n) est majorée par 1.
3. En déduire que la suite (v_n) est convergente sans utiliser les propriétés sur les opérations des limites.

Exercice 37 :

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{6n+3}{n+1}$.

1. Étudier les variations de la suite (v_n).
2. Montrer que (v_n) est majorée par 6.
3. En déduire que la suite (v_n) est convergente.