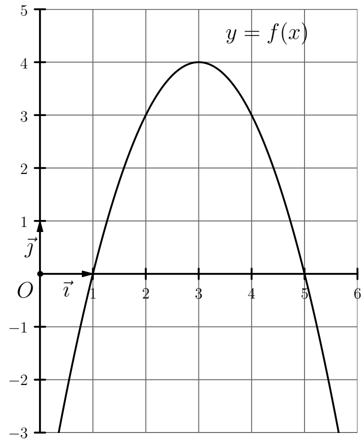
Primitives et intégration

Corrigés

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

La courbe ci-dessous représente une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et on note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.



— *Proposition 1 :* FAUSSE - $F'(3) = f(3) = 4$

— *Proposition 2 :* VRAIE - F est bien croissante sur $]1\,;5\,[$ car $F'(x) = f(x) \geqslant 0$ pour x dans $]1\,;5\,[$

— *Proposition 3 :* FAUSSE - le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 est égal à $F'(2) = f(2) = 3$ et ne peut être égal à 4 comme proposé.

— *Proposition 4 :* FAUSSE - $F''(x) = f'(x)$. Or f n'est pas croissante sur tout l'intervalle $]1\,;5\,[$ mais uniquement sur $]1\,;3\,[$, donc $f'(x)$ n'est positive que sur $]1\,;3\,[$ et pas sur tout l'intervalle $]1\,;5\,[$.

Exercice 2 :

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec $x \in [0\,;15\,]$.

1. $C'_m(x) = 6x - 36$.

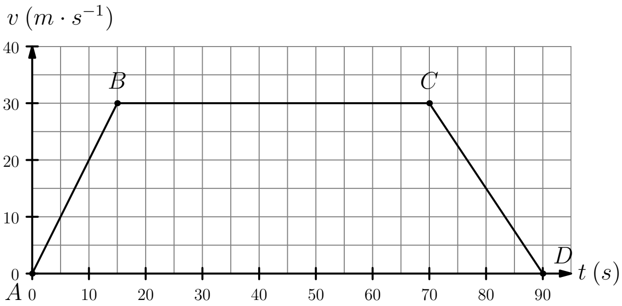
x	0		6		15
$C'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$C_m(x)$	750	$\searrow$	642	$\nearrow$	885

Il faut donc fabriquer 6 milliers d'objets pour avoir un coût marginal minimum.

2. C_T est une primitive de C_m sur $[0\,;15\,]$.
On a donc $C_T(x) = 3 \times \dfrac{x^3}{3} - 36 \times \dfrac{x^2}{2} + 750x + C = x^3 - 18x^2 + 750x + C$ où C est la constante telle que $C_T(0) = 200 \Leftrightarrow 0^3 - 18 \times 0^2 + 750 \times 0 + C = 200 \Leftrightarrow C = 200$.
C_T est donc définie par $C_T(x) = x^3 - 18x^2 + 750x + 200$.

Exercice 3 :

Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse v (en mètres par seconde) d'une moto sur une route rectiligne en fonction du temps t (en secondes).



Remarque :

- Entre 0 et 15 secondes, le mouvement est dit uniformément accéléré ;
- Entre 15 et 70 secondes, le mouvement est dit uniforme ;
- Entre 70 et 90 secondes, le mouvement est dit uniformément décéléré.

1 Si $v(t) = d'(t)$ alors on peut dire que la fonction d est une primitive de la fonction v.

2 Mouvement entre 0 et 15 secondes :

(a) Une équation de la droite (AB) est $y = 2x$. Donc, $v(t) = 2t$ pour t compris entre 0 et 15 secondes.

(b) $d(t) = t^2 + C$. Or, $d(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$. On a donc finalement $d(t) = t^2$ pour t compris entre 0 et 15 secondes.

(c) $d(15) = 15^2 = 225$ mètres.

3 Mouvement entre 15 et 70 secondes :

(a) $v(t) = 30$ pour t compris entre 15 et 70 secondes
Donc, $d(t) = 30t + C$ pour t compris entre 15 et 70 secondes. Or, $d(15) = 225 \Leftrightarrow 30 \times 15 + C = 225 \Leftrightarrow C = -225$. On a donc finalement $d(t) = 30t - 225$ pour t compris entre 15 et 70 secondes.

(b) $d(70) = 30 \times 70 - 225 = 1875$ mètres.

4 Mouvement entre 70 et 90 secondes :

(a) Le coefficient directeur de (CD) est égal à $\dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{0-30}{90-70} = -1,5$. (CD) admet donc une équation de la forme $y = -1,5x + p$. Or, on doit avoir $y_D = -1,5x_D + p \Leftrightarrow 0 = -1,5 \times 90 + p \Leftrightarrow p = 135$. Une équation de (CD) est donc $y = -1,5x + 135$.
Ainsi $v(t) = -1,5t + 135$ pour t compris entre 70 et 90 secondes.

(b) $d(t) = -1,5 \times \dfrac{t^2}{2} + 135t + C = -0,75t^2 + 135t + C$. Or, $d(70) = 1875 \Leftrightarrow -0,75 \times 70^2 + 135 \times 70 + C = 1875 \Leftrightarrow C = -3900$. On a donc finalement $d(t) = -0,75t^2 + 135t - 3900$ pour t compris entre 70 et 90 secondes.

(c) $d(90) = -0,75 \times 90^2 + 135 \times 90 - 3900 = 2175$ mètres.

Exercice 4 :

1 $\displaystyle\int_2^3 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_2^3 = \frac{22}{3}.$

2 $\displaystyle\int_1^2 \left(3x + 1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left[3\frac{x^2}{2} + x + \ln x\right]_1^2 = \frac{11}{2} + \ln 2.$

3 $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{x}\right]_1^4 = 1.$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}(\ln x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}.$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\int_{-1}^{0} 3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-3\mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^{0} = -3+3\mathrm{e}.$

$\boxed{6}$ $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \left(2-\frac{1}{2}\times 4\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$

$\boxed{7}$ $\displaystyle\int_0^{1} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1} -\frac{1}{2}\left(-2x\mathrm{e}^{-x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^{1} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}+\frac{1}{2}.$

Exercice 5 :

$\boxed{1}$ $F'(x) = 1\times \ln x + x\times\dfrac{1}{x} = f(x).$

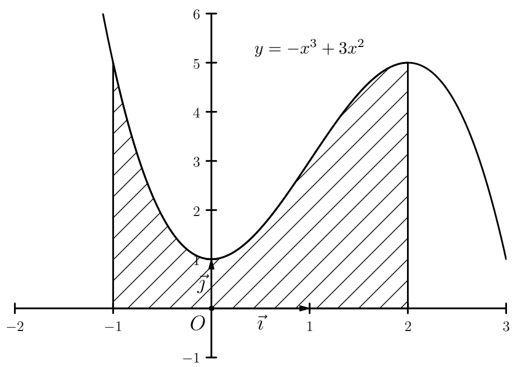
$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_1^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^2 = [x\ln x]_1^2 = 2\ln 2.$

Exercice 6 :

$\boxed{1}$ $F'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x} + (-2x-3)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}(-2+2x+3) = f(x).$

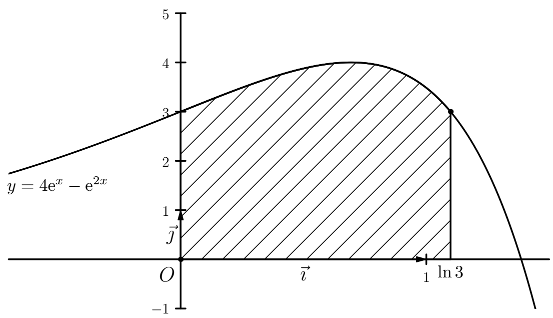
$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = \left[(-2x-3)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -5\mathrm{e}^{-1}+3.$

Exercice 7 :



$$\text{aire} = \int_{-1}^{2} -x^3+3x^2\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_{-1}^{2} = (-4+8)-\left(-\frac{1}{4}-1\right) = \frac{21}{4}\ \text{unités d'aire.}$$

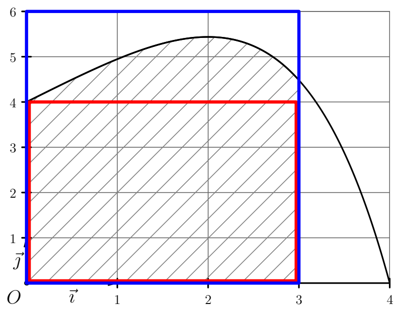
Exercice 8 :



$$\begin{aligned}
\text{aire} &= \int_0^{\ln 3} 4\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\ln 3} 4\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\left(2\mathrm{e}^{2x}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[4\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\ln 3} \\
&= \left(4\times 3 - \frac{1}{2}\times 9\right) - \left(4 - \frac{1}{2}\right) = 4 \text{ unités d'aire.}
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire sous la courbe hachurée ci-dessous. Elle est comprise entre l'aire du rectangle rouge, qui est égale à 3×4, et l'aire du rectangle bleu, qui est égale à 3×6.



Ainsi, on a bel et bien $12 \leqslant \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 18$.

Exercice 10 :

$$\begin{aligned}
aire &= \int_0^1 2 - \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (\text{« intégrale de la plus grande - plus petite »}) \\
&= \int_0^1 2 - 2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[2x + 2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 \\
&= 2 + 2\mathrm{e}^{-1} - 2 = 2\mathrm{e}^{-1}.
\end{aligned}$$

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.
Dans un repère orthonormé d'unité 2 cm, on note C_f la courbe représentative de la fonction f et D la droite d'équation $y = x$.

1. Pour tout $x > 0$, $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x}$.

   Si $0 < x < 1$, $\ln x < 0$ donc $-\ln x > 0$ et $-\dfrac{\ln x}{x} > 0$. C_f est au dessus de D sur $]0\,;1[$.

   Si $x > 1$, $\ln x > 0$ donc $-\ln x < 0$ et $-\dfrac{\ln x}{x} < 0$. C_f est en dessous de D sur $]0\,;1[$.

2. A (en unités d'aire) = « intégrale de la plus grande - plus petite »
   $= \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\times \ln x\,\mathrm{d}x$

$= \left[\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{2}$

A en $\mathrm{cm}^2 = \dfrac{1}{2} \times$ (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses) $\times$ (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées)

$= \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2.$

Exercice 12 :

$$\begin{aligned}
\text{valeur moyenne} &= \frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int_1^4 2 \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\left[2\ln x\right]_1^4 \\
&= \frac{1}{3}(2\ln 4 - 0) \\
&= \frac{2}{3}\ln 4.
\end{aligned}$$

Exercice 13 :

La vitesse (en mètres par seconde) d'un objet en mouvement est définie par $v(t) = 25\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right)$ (t en secondes).

$$\begin{aligned}
\text{vitesse moyenne} &= \frac{1}{2-1}\int_1^2 v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^2 25\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^2 25 + 12{,}5\left(-2\mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[25t + 12{,}5\mathrm{e}^{-2t}\right]_1^2 \\
&= \left(50 + 12{,}5\mathrm{e}^{-4}\right) - \left(25 + 12{,}5\mathrm{e}^{-2}\right) \\
&= 25 + 12{,}5\mathrm{e}^{-4} - 12{,}5\mathrm{e}^{-2} \\
&\approx 23{,}5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.
\end{aligned}$$

Exercice 14 :

Le cours d'une action en euros est modélisée par la fonction f définie sur $[1;13]$ par $f(t) = 20t + 40 - 80\ln t$ où t représente le nombre de mois écoulés depuis le 1er décembre 2019.

1 $f'(t) = 20 - 80 \times \dfrac{1}{t} = \dfrac{20t - 80}{t}$.

t	1		4		13
$20t - 80$		$-$	0	$+$	
t		$+$		$+$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\boxed{2}$ $F'(t) = 20t + 120 - 80\left(1 \times \ln t + t \times \dfrac{1}{t}\right) = 20t + 120 - 80 - 80\ln t = 20t + 40 - 80\ln t = f(t)$.

$\boxed{3}$ valeur moyenne $= \dfrac{1}{13-1}\displaystyle\int_1^{13} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{12}\left[F(t)\right]_1^{13}$
$= \dfrac{1}{12}(3250 - 1040\ln 13 - 130) = \dfrac{1}{12}(3120 - 1040\ln 13) \approx 37,70$ euros.