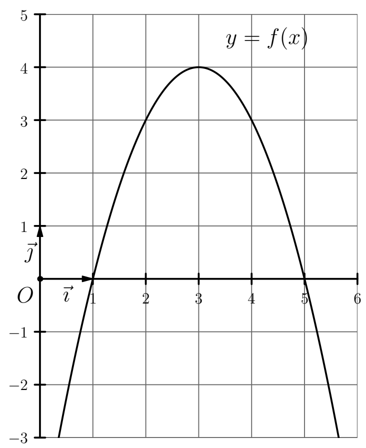
Tle Spé Maths
Entraînement

# Primitives et intégration

Évarite Galois
maths-mde.fr

## Exercice 1 :

La courbe ci-dessous représente une fonction $f$ continue sur $\mathbb{R}$ et on note $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.




Déterminer, en justifiant votre réponse, si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses :

— *Proposition 1 :* « $F'(3) = 0$ »

— *Proposition 2 :* « $F$ est croissante sur $]1\,;5\,[$ »

— *Proposition 3 :* « La tangente à la courbe représentative de la primitive $F$ au point d'abscisse 2 admet comme équation $y = 4x$ »

— *Proposition 4 :* « La primitive $F$ est convexe sur $]1\,;5\,[$ »

## Exercice 2 :

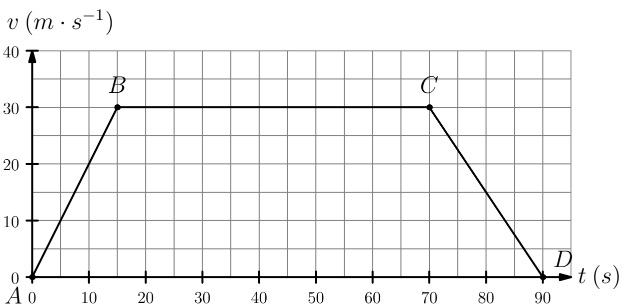
Une entreprise fabrique $x$ milliers d'objets avec $x \in [0\,;15]$.

1. Le coût marginal, en euros, de cette production est définie sur $[0\,;15]$ par $C_m(x) = 3x^2 - 36x + 750$.
Étudier les variations de la fonction coût marginal sur $[0\,;15]$.
En déduire la quantité d'objets à fabriquer pour avoir un coût marginal minimum.

2. Le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total noté $C_T(x)$.
Déterminer $C_T(x)$ sachant que $C_T(0) = 200$. *(les coûts fixes s'élevant à 200 euros)*

## Exercice 3 :

Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse $v$ (en mètres par seconde) d'une moto sur une route rectiligne en fonction du temps $t$ (en secondes).




Remarque :

— Entre 0 et 15 secondes, le mouvement est dit uniformément accéléré ;

— Entre 15 et 70 secondes, le mouvement est dit uniforme ;

— Entre 70 et 90 secondes, le mouvement est dit uniformément décéléré.

1 On note $d$ la fonction qui donne la distance parcourue (en mètres) en fonction du temps $t$. On rappelle que la fonction vitesse $v$ est la dérivée de la fonction distance $d$. Compléter la phrase suivante :
Si $v(t) = d'(t)$ alors on peut dire que la fonction ...... est une primitive de la fonction .......

2 Mouvement entre 0 et 15 secondes :

(a) En déterminant une équation de la droite $(AB)$, déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de $t$ pour $t$ compris entre 0 et 15 secondes.

(b) En déduire $d(t)$ pour $t$ compris entre 0 et 15 secondes.

(c) Quelle est la distance parcourue au bout de 15 secondes ?

3 Mouvement entre 15 et 70 secondes :

(a) Quelle est l'expression de $v(t)$ entre 15 et 70 secondes ?
En déduire $d(t)$ pour $t$ compris entre 15 et 70 secondes.

(b) Quelle est la distance parcourue au bout de 70 secondes ?

4 Mouvement entre 70 et 90 secondes :

(a) En déterminant une équation de la droite $(CD)$, déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de $t$ pour $t$ compris entre 70 et 90 secondes.

(b) En déduire $d(t)$ pour $t$ compris entre 70 et 90 secondes.

(c) Quelle est la distance parcourue au bout des 90 secondes ?

## Exercice 4 :

Calculer les intégrales suivantes :

1 $\displaystyle\int_2^3 \left(x^2+1\right) \mathrm{d}x$ ;

2 $\displaystyle\int_1^2 \left(3x+1+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ ;

3 $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ ;

4 $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}(\ln x) \mathrm{d}x$ ;

5 $\displaystyle\int_{-1}^0 3\mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$ ;

6 $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}\right) \mathrm{d}x$ ;

7 $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$.

## Exercice 5 :

1 Montrer que la fonction $F$ définie par $F(x) = x\ln x$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f$ définie par $f(x) = 1+\ln x$.

2 En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

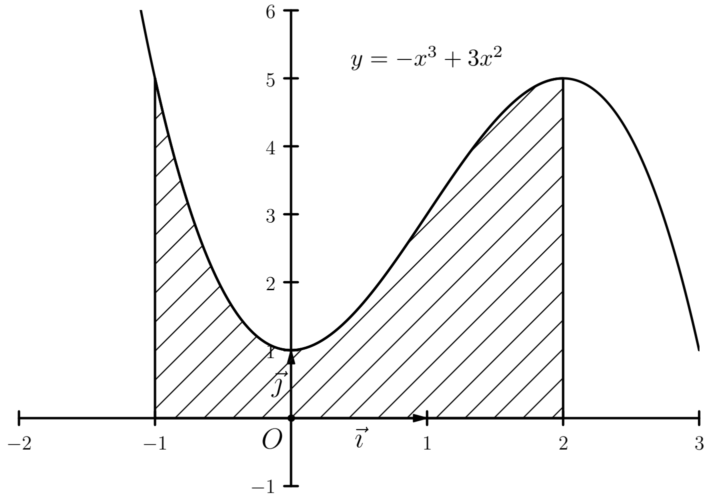
## Exercice 6 :

1 Montrer que la fonction $F$ définie par $F(x) = (-2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ définie par $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

2 En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

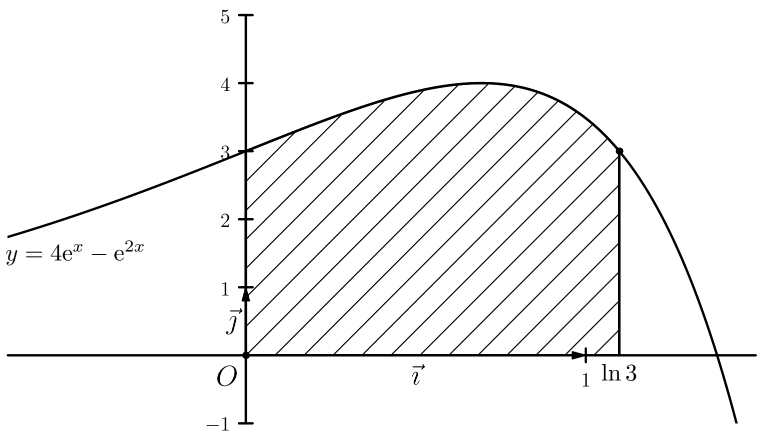
## Exercice 7 :

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



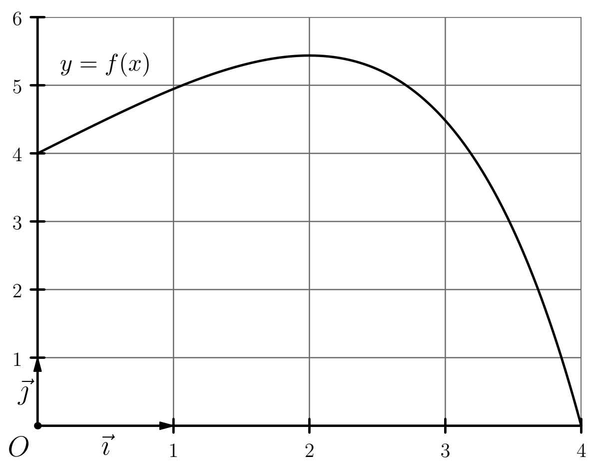

## Exercice 8 :

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :




## Exercice 9 :

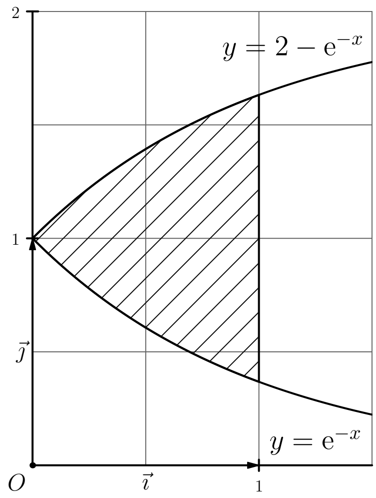
La courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $[0;4]$ est donnée ci-dessous :




Justifier, d'après le graphique, que $12 \leqslant \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 18$.

## Exercice 10 :

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :




## Exercice 11 :

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.
Dans un repère orthonormé d'unité 2 cm, on note $C_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ et $D$ la droite d'équation $y = x$.

1. Étudier la position relative de $C_f$ et $D$ sur $]0\,;+\infty[$.
2. Calculer l'aire $A$ (en cm$^2$) du domaine délimité par la courbe $C_f$, la droite $D$ et par les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

## Exercice 12 :

Calculer la valeur moyenne sur $[1\,;4]$ de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

## Exercice 13 :

La vitesse (en mètres par seconde) d'un objet en mouvement est définie par $v(t) = 25\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right)$ ($t$ en secondes).
Calculer la vitesse moyenne de l'objet (la valeur moyenne de la fonction « vitesse ») entre $t = 1$ s et $t = 2$ s.

## Exercice 14 :

Le cours d'une action en euros est modélisée par la fonction $f$ définie sur $[1;13]$ par $f(t) = 20t + 40 - 80\ln t$ où $t$ représente le nombre de mois écoulés depuis le 1er décembre 2019.

1. Étudier les variations de $f$ sur $[1;13]$.
2. Justifier que la fonction $F$ définie par $F(t) = 10t^2 + 120t - 80t\ln t$ est une primitive de $f$ sur $[1;13]$.
3. Calculer la valeur moyenne de $f$ sur $[1;13]$.