Tle Spé Maths
Entraînement

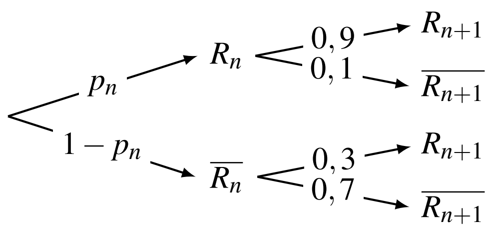
Loi binomiale

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

Partie A

1



2 Les évènements R_n et $\overline{R_n}$ partitionnent l'univers, la loi des probabilités totales donne :
$p_{n+1} = P(R_{n+1}) = P\left(R_n \cap R_{n+1}\right) + P\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) = p_n \times 0,9 + (1-p_n) \times 0,3 = 0,9p_n + 0,3 - 0,3p_n$.
Ainsi, on a bien $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3$.

3 (a) Établissons la relation de récurrence de la suite (u_n). Soit n un entier naturel :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,75 && \text{par définition de la suite } (u_n)\\
&= (0,6p_n + 0,3) - 0,75 && \text{par la relation de récurrence de la suite } (p_n)\\
&= 0,6p_n - 0,45\\
&= 0,6(u_n + 0,75) - 0,45 && \text{par définition de la suite } (u_n)\\
&= 0,6u_n + 0,45 - 0,45\\
&= 0,6u_n
\end{aligned}$$

La relation de récurrence de la suite (u_n) est donc bien celle d'une suite géométrique, de raison $q = 0,6$. Le premier terme de la suite est $u_0 = p_0 - 0,75 = 0,6 - 0,75 = -0,15$.

(b) On peut donc donner la forme explicite du terme général de la suite géométrique :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n = -0,15 \times 0,6^n$.
On en déduit : $u_n = p_n - 0,75 \iff p_n = u_n + 0,75 = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$.

$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

(c) La raison de la suite géométrique u est comprise entre -1 et 1, strictement, donc la suite u converge vers 0.
Par limite de la somme, on en déduit que la suite p converge vers $\ell = 0,75$.

(d) En assimilant les probabilités à des proportions, au bout d'un certain temps, l'athlète franchira la barre dans 75 % des cas.

Partie B

1 Ici, nous avons :

— une expérience à deux issues dont le succès est « l'athlète franchit la haie » a une probabilité $p = 0,75$;

— cette expérience est répétée dix fois (la course comporte 10 haies) d'une façon assimilable à une répétition identique et indépendante , donc $n = 10$ répétitions ;

— dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,75$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le nombre de haies franchies pendant la course).

Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,75)$.

2 La probabilité demandée est $P(X=10)$. Par propriété, on a :

$P(X=10)=\binom{10}{10}\times 0,75^{10}\times 0,25^{0}=0,75^{10}\approx 0,056.$

La probabilité que l'athlète franchisse les dix haies est donc d'environ 0,056.

3 La probabilité demandée est $P(X\geqslant 9)$.

Selon le modèle de calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de ce résultat directement, ou alors on a recours à : $P(X\geqslant 9)=1-P(X<9)=1-P(X\leqslant 8)$.

La calculatrice donne une valeur approchée au millième près qui est 0,244.

Exercice 2 :

Un technicien contrôle les machines équipant une grande entreprise. Toutes ces machines sont identiques. On sait que :

- 20 % des machines sont sous garantie ;
- 0,2 % des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie ;
- 8,2 % des machines sont défectueuses.

Le technicien teste une machine au hasard.
On considère les évènements suivants :

- G : « la machine est sous garantie » ;
- D : « la machine est défectueuse » ;
- $\overline{G}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de G et D.

1 La probabilité $p_G(D)$ de l'évènement D sachant que G est réalisé est égale à :

a. 0,002 **b.** 0,01 **c.** 0,024 **d.** 0,2

20 % des machines sont sous garantie donc $p(G)=0,2$.
0,2 % des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie donc $p(G\cap D)=0,002$.
$p_G(D)=\dfrac{p(G\cap D)}{p(G)}=\dfrac{0,002}{0,2}=0,01$ **Réponse b.**

2 La probabilité $p\left(\overline{G}\cap D\right)$ est égale à :

a. 0,01 b. 0,08 **c.** 0,1 **d.** 0,21

8,2 % des machines sont défectueuses donc $p(D)=0,082$.
D'après la formule des probabilités totales : $p(D)=p(G\cap D)+p\left(\overline{G}\cap D\right)$. Donc :
$p\left(\overline{G}\cap D\right)=p(D)-p(G\cap D)=0,082-0,002=0,08$ **Réponse b.**

3 La machine est défectueuse. La probabilité qu'elle soit sous garantie est environ égale, à 10^{-3} près, à :

a. 0,01 **b.** 0,024 **c.** 0,082 **d.** 0,1

On cherche : $p_D(G)=\dfrac{p(G\cap D)}{p(D)}=\dfrac{0,002}{0,082}\approx 0,024$ **Réponse b.**

Pour les questions 4 et 5, on choisit au hasard et de façon indépendante n machines de l'entreprise, où n désigne un entier naturel non nul.
On assimile ce choix à un tirage avec remise, et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de n machines le nombre de machines défectueuses dans ce lot.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p=0,082$.

$\boxed{4}$ Dans cette question, on prend $n = 50$.
La valeur de la probabilité $p(X > 2)$, arrondie au millième, est de :

a. 0,136 **b.** 0,789 **c.** 0,864 d. 0,924

$p(X > 2) = 1 - p(X \leqslant 2) \approx 1 - 0,2114 \approx 0,789$ **Réponse b.**

$\boxed{5}$ On considère un entier n pour lequel la probabilité que toutes les machines d'un lot de taille n fonctionnent correctement est supérieure à $0,4$.
La plus grande valeur possible pour n est égale à :

a. 5 **b.** 6 **c.** 10 d. 11

Si toutes les machines fonctionnent, le nombre de machines défectueuses est 0; donc on cherche le plus grand n tel que $p(X = 0) > 0,4$.
$p(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0,082^0 \times (1 - 0,082)^n = 0,918^n$
$p(X = 0) > 0,4 \iff 0,918^n > 0,4$
En utilisant la calculatrice, on constate que le plus grand entier n vérifiant la susdite inéquation est 10. **réponse c.**

Exercice 3 :

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication.
Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.
Dans les trois questions suivantes, on prend $n = 50$.

$\boxed{1}$ On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,04^0 \times 0,96^{50} \approx 1 - 0,1299 \approx 0,8701$ soit 0,870 au millième près : réponse **b.**

$\boxed{2}$ La probabilité $p(3 < X \leqslant 7)$ est égale à : $p(X \leqslant 7) - p(x \leqslant 3) \approx 0,9992 - 0,8609$ soit 0,1383. Réponse **b.**

$\boxed{3}$ Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ?
La calculatrice donne $k = 4$, réponse **c.**
Dans les questions suivantes, n ne vaut plus nécessairement 50.

(a) Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ?
Réponse **a.**

(b) On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle ?
La fonction donne le plus petit naturel n tel que $1 - 0,96^n \geqslant$ x.
Réponse **a.**

Exercice 4 :

Pour ce problème il convient de bien visualiser la situation. Nous avons des billes prélevées au hasard dans l'urne, et les billes sont indiscernables au toucher, donc nous sommes dans une situation d'équiprobabilité : chaque bille a une probabilité égale à $\dfrac{1}{15}$ d'être choisie dans l'urne.

On peut donc avoir la visualisation suivante :

n° bille	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
couleur	R	B	B	B	B	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
$G=$	-10	-4	-1	2	5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Chaque colonne de ce tableau a une probabilité de $\dfrac{1}{15}$.

Question 1 : réponse B

Pour que la bille tirée soit bleue ou numérotée d'un nombre pair, il faut avoir choisi une bille dont le numéro est dans $\{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 8\ ;\ 10\ ;\ 12\ ;\ 14\}$, il y a donc 9 issues favorables, parmi 15 issues possibles, la probabilité est de $\dfrac{9}{15}$.

Question 2 : Réponse C

Il y a une seule bille verte portant le numéro 7, et il y a dix billes vertes, donc la probabilité est $\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{10}{15}} = \dfrac{1}{10}$.

Question 3 : réponse B

L'événement (G = 5) est réalisé par un choix de bille portant le numéro 5 (bille bleue donc on a : $G = 3\times 5 - 10 = 5$) ou le numéro 15 (bille verte donc $G = 15 - 10 = 5$). Il y a donc deux issues favorables sur 15 issues possibles : la probabilité est de $\dfrac{2}{15}$.

Question 4 : Réponse A

L'événement $(G=0)$ est réalisé uniquement par le choix de la bille numérotée 10.
Comme cette bille est verte, cela implique que l'événement $(G=0)\cap R$ est impossible, donc sa probabilité est nulle et donc, en divisant ce 0 par $P(R)$, on obtient encore 0.

Question 5 : Réponse C

L'événement $(G=-4)$ est réalisé par les billes numérotées 2 et 6, la première est bleue et la seconde est verte, donc $P_{(G=-4)}(V) = \dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{15}} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5 :

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

— L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,6 ;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,3.

— Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à $0,3$;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,2.

— Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les évènements suivants :

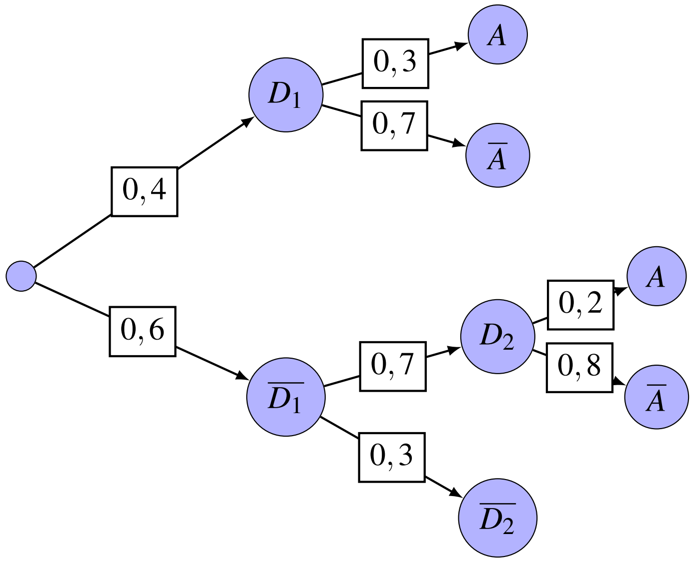
D_1 : « la personne décroche au premier appel » ;

D_2 : « la personne décroche au deuxième appel » ;

A : « la personne achète le produit ».

Partie A

1. On complète l'arbre pondéré.



2 En utilisant les propriétés de l'arbre pondéré, on obtient :
$P(A) = P(D_1 \cap A) + P\left(\overline{D_1} \cap D_2 \cap A\right) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 = 0,204.$

3 On sait que la personne a acheté le produit.
La probabilité qu'elle ait décroché au premier appel est :
$P_A(D_1) = \dfrac{P(D_1 \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,4 \times 0,3}{0,204} \approx 0,588.$

Partie B

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0,204$.

1 On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.

(a) On admet que X suit une loi binomiale ; ses paramètres sont $n = 30$ et $p = 0,204$.

(b) La probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit est :
$P(X = 6) = \binom{30}{6} \times 0,204^6 \times (1 - 0,204)^{30-6} \approx 0,179$

(c) L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = np = 30 \times 0,204 = 6,12$.
Donc pour chaque échantillon de 30 personnes, il y en a en moyenne $6,12$ qui achètent le produit.

2 Soit n un entier naturel non nul. On considère désormais un échantillon de n personnes.
La plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à $0,99$ est le plus petit entier naturel n tel que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$. On résout cette inéquation.

$$P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff 1 - P(X = 0) \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant P(X = 0)$$
$$\iff 0,01 \geqslant \binom{n}{0} \times 0,204^0 \times (1 - 0,204)^n \iff 0,01 \geqslant 0,796^n$$

En utilisant la calculatrice on obtient 21.