Loi binomiale

Exercice 1 :

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

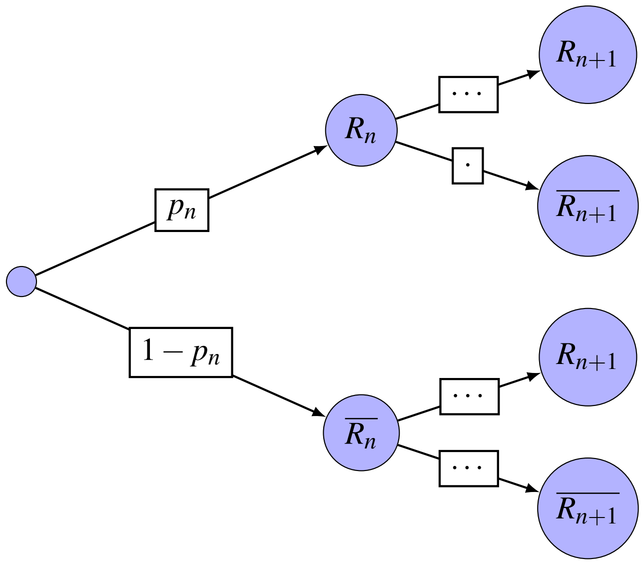
Partie A : Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'évènement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n-ième séance »,
- p_n la probabilité de l'évènement R_n. On considère que $p_0 = 0,6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3.$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - 0,75$.

   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   (b) Démontrer que, pour tout entier n naturel n :

   $$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

   (c) En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

   (d) Interpréter la valeur de ℓ dans le cadre de l'exercice.

Partie B : Après de nombreuses séances d'entraînement, l'entraineur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de $0,75$ et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies,

$\boxed{1}$ Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

$\boxed{2}$ Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.

$\boxed{3}$ Calculer $p(X \geqslant 9)$, à 10^{-3} près,

Exercice 2 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.
Les questions sont indépendantes.

Un technicien contrôle les machines équipant une grande entreprise. Toutes ces machines sont identiques.
On sait que :

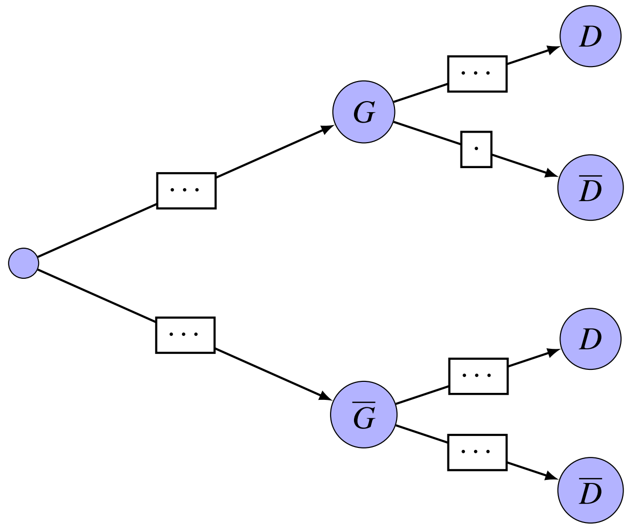
- 20 % des machines sont sous garantie ;
- 0,2 % des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie ;
- 8,2 % des machines sont défectueuses.

Le technicien teste une machine au hasard.

On considère les évènements suivants :

- G : « la machine est sous garantie » ;
- D : « la machine est défectueuse » ;
- $\overline{G}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de G et D.

Pour répondre aux questions 1 à 3, on pourra s'aider de l'arbre proposé ci-contre.



$\boxed{1}$ La probabilité $p_G(D)$ de l'évènement D sachant que G est réalisé est égale à :

a. 0,002 **b.** 0,01 **c.** 0,024 **d.** 0,2

$\boxed{2}$ La probabilité $p\left(\overline{G} \cap D\right)$ est égale à :

a. 0,01 b. 0,08 **c.** 0,1 **d.** 0,21

$\boxed{3}$ La machine est défectueuse. La probabilité qu'elle soit sous garantie est environ égale, à 10^{-3} près, à :

a. 0,01 **b.** 0,024 **c.** 0,082 **d.** 0,1

Pour les questions 4 et 5, on choisit au hasard et de façon indépendante n machines de l'entreprise, où n désigne un entier naturel non nul.
On assimile ce choix à un tirage avec remise, et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de n machines le nombre de machines défectueuses dans ce lot.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,082$.

4 Dans cette question, on prend $n = 50$.
La valeur de la probabilité $p(X > 2)$, arrondie au millième, est de :

a. 0,136 **b.** 0,789 **c.** 0,864 d. 0,924

5 On considère un entier n pour lequel la probabilité que toutes les machines d'un lot de taille n fonctionnent correctement est supérieure à $0,4$.
La plus grande valeur possible pour n est égale à :

a. 5 **b.** 6 **c.** 10 d. 11

Exercice 3 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication.
Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.
Dans les trois questions suivantes, on prend $n = 50$.

1 Quelle est la probabilité, arrondie au millième, de tirer au moins une pièce défectueuse ?

a. 1 **b.** 0,870 **c.** 0,600 **d.** 0,599

2 La probabilité $p(3 < X \leqslant 7)$ est égale à :

a. $p(X \leqslant 7) - p(X > 3)$ **b.** $p(X \leqslant 7) - p(X \leqslant 3)$
c. $p(X < 7) - p(X > 3)$ **d.** $p(X < 7) - p(X \geqslant 3)$

3 Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ?

a. 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5

Dans les questions suivantes, n ne vaut plus nécessairement 50.

4 Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ?

a. $0,04^n$ **b.** $0,96^n$ **c.** $1 - 0,04^n$ **d.** $1 - 0,96^n$

5 On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle ?

```
def seuil (x) :
    n=1
    while 1-0.96**n < x :
        n = n + 1
    return n
```

(a) Le plus petit nombre n tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

(b) Le plus petit nombre n tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

(c) Le plus grand nombre n tel que la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses soit supérieure ou égale à x.

(d) Le plus grand nombre n tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

Exercice 4 :

Pour chacune des cinq questions de cet exercice, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Une urne contient 15 billes indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 15.
La bille numérotée 1 est rouge.
Les billes numérotées 2 à 5 sont bleues.
Les autres billes sont vertes.

On choisit une bille au hasard dans l'urne.
On note R (respectivement B et V) l'évènement : « La bille tirée est rouge » (respectivement bleue et verte).

Question 1 :

Quelle est la probabilité que la bille tirée soit bleue ou numérotée d'un nombre pair ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{7}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{11}{10}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Question 2 :

Sachant que la bille tirée est verte, quelle est la probabilité qu'elle soit numérotée 7 ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{10}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Un jeu est mis en place. Pour pouvoir jouer, le joueur paie la somme de 10 euros appelée la mise.
Ce jeu consiste à tirer une bille au hasard dans l'urne.

- Si la bille tirée est bleue, le joueur remporte, en euro, trois fois le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est verte, le joueur remporte, en euro, le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est rouge, le joueur ne remporte rien.

On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre ce qu'il remporte et sa mise de départ.
Par exemple, si le joueur tire la bille bleue numérotée 3, alors son gain algébrique est -1 euro.

Question 3 :

Que vaut $P(G = 5)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{1}{3}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Question 4 :

Quelle est la valeur de $P_R(G=0)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
0	$\dfrac{1}{15}$	1	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Question 5 :

Que vaut $P_{(G=-4)}(V)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{1}{2}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Exercice 5 :

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

- L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,6;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,3.
- Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à $0,3$;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,2.
- Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les évènements suivants :

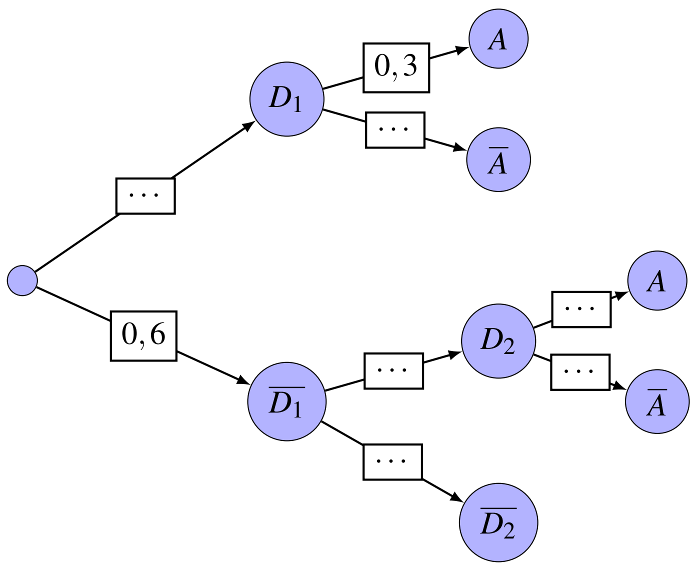
D_1 : « la personne décroche au premier appel »;

D_2 : « la personne décroche au deuxième appel »;

A : « la personne achète le produit ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. En utilisant l'arbre pondéré, montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = 0,204$.
3. On sait que la personne a acheté le produit. Quelle est la probabilité qu'elle ait décroché au premier appel ?

Partie B

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0,204$.

1 On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.

(a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner, sans justifier, ses paramètres.

(b) Déterminer la probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit. Arrondir le résultat au millième.

(c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

Interpréter le résultat.

2 Soit n un entier naturel non nul.
On considère désormais un échantillon de n personnes.
Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à $0,99$.