Logarithme népérien

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$.

1. $\ln(8)$.
2. $\ln(8)+\ln(32)$.
3. $\ln(64)-\ln(8)$.
4. $\ln(16)-3\ln(2)$.

Exercice 2 :

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(3)$.

1. $\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$.
2. $\ln(81)-2\ln(3)$.
3. $\ln\left(\dfrac{3}{\mathrm{e}}\right)$.
4. $\ln\left(9\mathrm{e}^2\right)$.

Exercice 3 :

Dériver la fonction f dans les cas suivants.

1. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x\ln x$.
2. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=(\ln x)^2$.
3. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.
4. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4\ln x}{x^2}$.

Exercice 4 :

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x+\ln x$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{\ln x}{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln x)$.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 3(\ln x)+x^2$.
5. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}-\ln x$.

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln(x+1)=0$.
2. $\ln(2-3x)=\ln 4$.
3. $\ln(4x)=\ln(x-3)$.
4. $\ln(x-1)+\ln(x-2)=\ln 6$.
5. $\ln x=4$.
6. $\ln(2x)=5$.
7. $\ln(3x)=1$.
8. $\ln(1+x)=-2$.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\ln(x+1)\leqslant 0$.
2. $\ln x\geqslant 3$.
3. $1-\ln x\geqslant 0$.

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.
Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$ et étudier ses variations sur $]0;+\infty[$.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $[0,5\,;+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x - 1)$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[0,5\,;+\infty[$.
3. Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0,5\,;+\infty[$.

Exercice 9 :

Quand l'oreille d'un individu est soumise à une pression acoustique x, exprimée en bars, l'intensité sonore, exprimée en décibels, du bruit responsable de cette pression est donnée par :

$$f(x) = 8,68 \times \ln x + 93,28$$

1. Calculer l'intensité sonore correspondante à une pression acoustique de 5 bars.
2. Justifier que f est une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Un individu normal ne peut supporter un bruit supérieur à 120 décibels.
   (a) On cherche à connaitre le premier nombre entier x de bars pour lequel l'intensité $f(x)$ dépasse 120 décibels à l'aide d'un script python.
   Pour cela on part d'une pression $x = 1$ que l'on augmente de 1 tant que cela est nécessaire.
   Compléter la 3^{e} ligne du code python ci-dessous pour qu'il réponde au problème :

```
from math import*
x=1
while 8.68*log(x)+93.28 ..... :
   x=x+1
print(x)
```

   Remarque : avec python le logarithme népérien est donné par log()

   (b) Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = 120$ et retrouver ce que devrait afficher le script python.

Exercice 10 :

La fonction B définie sur $[1\,;6]$ par $B(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x$ représente le bénéfice mensuel (en dizaines de milliers d'euros) réalisé par une entreprise lors de la vente de x centaines d'objets produits par mois.
En étudiant les variations de B, déterminer la quantité d'objets à produire par mois pour obtenir un bénéfice mensuel maximal.

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3 - 2x - \ln x$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Dériver f et étudier ses variations sur $]0;+\infty[$.

3 Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

4 Étudier, par le calcul, la position relative de la courbe représentative de f et de la droite D d'équation $y = 3-2x$ sur $]0;+\infty[$.

5 Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $[1\,;2]$. Déterminer une valeur approchée de x_0 à $0,1$ près par défaut.

6 Justifier que f est convexe sur $]0;+\infty[$.

Exercice 12 :

Dériver la fonction f dans les cas suivants.

1 f est définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(3x-6)$.

2 f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2)$.

3 f est définie sur $]-\infty\,;2[$ par $f(x) = \ln(-2x+4)$.

4 f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(3+\frac{1}{x}\right)$.

5 f est définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x-2}\right)$.

Exercice 13 :

Une étude portant sur le prix d'un type de cahiers aboutit à la modélisation suivante :
- f est la fonction définie sur $]0\,;1]$ par $f(x) = -4\ln x$;
- g est la fonction définie sur $]0\,;1]$ par $g(x) = 4\ln(6x+1)$;
- $f(x)$ et $g(x)$ représentent respectivement la quantité de cahiers demandée et offerte, exprimée en milliers, en fonction du prix unitaire x du cahier exprimé en euros.

1 Déterminer les limites des fonctions f et g en 0.

2 Étudier les variations des fonctions f et g sur $]0\,;1]$ et dresser leur tableau de variation.

3 En économie, le prix d'équilibre est la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$. Déterminer la valeur exacte de ce prix d'équilibre.

Exercice 14 :

Déterminer, dans chacun des cas suivants, le plus petit entier positif n vérifiant la relation donnée.

1 $3^n \geqslant 800$.
2 $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 0{,}01$.
3 $(1{,}03)^n \geqslant 2$.
4 $(0{,}95)^n \leqslant 0{,}2$.

Exercice 15 :

L'échelle de Richter sert à mesurer la puissance d'un tremblement de terre. La magnitude d'un séisme sur cette échelle est donnée par $M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$ où A représente l'amplitude maximale des ondes relevée par un sismographe et A_0 une amplitude référence.

1 Que vaut $\frac{A}{A_0}$ pour un séisme de magnitude égale à 5 ?

2 Si l'amplitude maximale des ondes A est multipliée par 100, de combien augmente la magnitude ?

Exercice 16 :

Pour mesurer la perte de puissance dans une fibre optique, on utilise le coefficient d'atténuation (exprimé en décibels par kilomètre) défini par $A = \frac{1}{L} \times 10 \times \log\left(\frac{P_e}{P_s}\right)$ où L est la longueur (en kilomètres) de la fibre optique, P_e est la puissance (en mW) du signal lumineux à l'entrée de la fibre et P_s est la puissance (en mW) du signal lumineux à la sortie de la fibre.

1. Un technicien effectue une mesure à la sortie d'une fibre de 5 km dont la puissance d'entrée est $P_e = 5\,\text{mW}$. Il obtient une puissance de sortie égale à $P_s = 3,5\,\text{mW}$. Calculer la valeur du coefficient d'atténuation correspondant.

2. Lorsque $P_s = \frac{1}{10} \times P_e$, on considère que la fibre optique doit-être remplacée. Quelle est alors la valeur de A pour une fibre de 10 km ?

3. Expliquer pourquoi le coefficient d'atténuation ne peut pas être négatif.