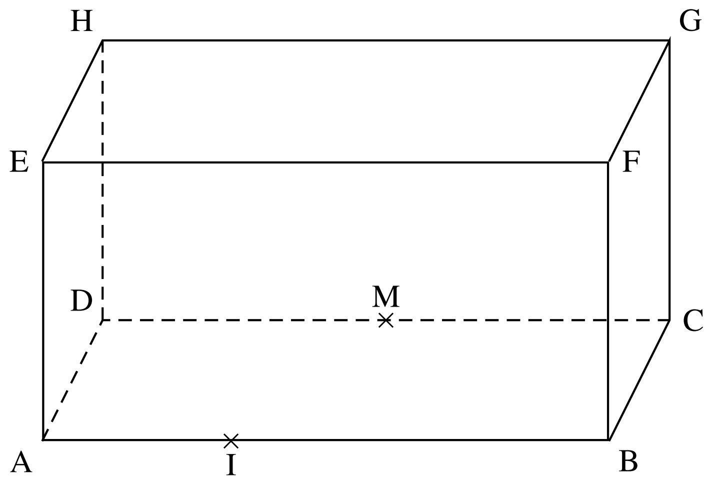
Tle Spé Maths
Entraînement

Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que AB $= 3$ et AD = AE $= 1$ représenté ci-dessous.



1 F$(3\,;0\,;1)$, H$(0\,;1\,;1)$, M$(1{,}5\,;1\,;0)$.

2 (a) Soit $\overrightarrow{\text{HF}}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{MF}}\begin{pmatrix}1,5\\-1\\1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires.

On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{HF}} = 6-6+0 = 0$

On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{MF}} = 3-6+3 = 0$.

Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF), il est donc normal à ce plan.

(b) On sait qu'alors :

$X(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{MHF}) \iff 2x+6y+3z+d=0$. Ainsi par exemple :

$\text{H}(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{MHF}) \iff 0+6+3+d=0 \iff d=-9$, donc finalement :

$$X(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{MHF}) \iff 2x+6y+3z-9=0.$$

(c) Le plan $\mathscr{P}$ a par exemple pour vecteur normal $\overrightarrow{p}\begin{pmatrix}5\\15\\-3\end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$, (on a bien $2\times\dfrac{5}{2}=5$, $6\times\dfrac{5}{2}=15$, mais $3\times\dfrac{5}{2}\neq-3$) donc les deux plans ne sont pas parallèles.

3 On a D$(0\,;1\,;0)$ et G$(3\,;1\,;1)$, d'où $\overrightarrow{\text{DG}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

On sait que :

$$X(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{DG}) \iff \overrightarrow{\text{DX}} = t\overrightarrow{\text{DG}},\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl}x-0&=&3t\\y-1&=&0\\z-0&=&1t\end{array}\right.\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&3t\\y&=&1\\z&=&t\end{array}\right.\ t\in\mathbb{R}.$$

4 Si la droite coupe le plan en un point N, les coordonnées de ce point vérifient les équations de la droite et celle du plan soit le système :

$$\begin{cases} x & = 3t \\ y & = 1 \\ z & = t \\ 2x+6y+3z-9 & = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$6t+6+3t-9=0 \iff 9t-3=0 \iff 3t-1=0 \iff t=\dfrac{1}{3}$. Les coordonnées de N sont donc $\left(3\times\frac{1}{3} ; 1 ; \frac{1}{3}\right)$, soit $\mathrm{N}\left(1 ; 1 ; \dfrac{1}{3}\right)$.

5 • On vérifie d'abord que R appartient au plan (HMF) :

$\mathrm{R}\left(3 ; \dfrac{1}{4} ; \dfrac{1}{2}\right) \in (\mathrm{HMF}) \iff 6+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}-9=0 \iff 6+3-9=0$ ce qui est vrai.

• On vérifie maintenant que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{GR}}$ est bien un vecteur normal au plan (HMF) :

On a $\overrightarrow{\mathrm{GR}}\begin{pmatrix} 3-3 \\ \frac{1}{4}-1 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Or ce vecteur n'est manifestement pas colinéaire au vecteur connu $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$: pour que $\overrightarrow{n}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{GR}}$ il faudrait que sa première coordonnée soit égale à 0, ce qui n'est pas le cas.

Conclusion : le point R n'est pas le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF).

Exercice 2 :

1 On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} -1-(-2) \\ 3-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ -1-0 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{-1}{3}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés

2 (a) $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 1\times1+3\times3+5\times-2 = 1+9-10 = 0.$

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1\times3+3\times-1+5\times0 = 3-3+0 = 0.$

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

(b) Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au plan (ABC), c'est donc un vecteur normal du plan (ABC).

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme :

$x+3y+5z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$

De plus, le point A appartient au plan (ABC) donc ses coordonnées verifient l'équation du plan. On a donc :

$-2+3\times0+5\times2+d=0 \iff -2+10+d=0 \iff d=-8$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $x+3y+5z-8=0$.

(c) $x_D+3y_D+5z_D-8 = 0+3\times0+5\times3-8 = 15-8 = 7 \neq 0$

Donc le point D n'appartient pas au plan (ABC) d'où les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

$\boxed{3}$ (a) Une équation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ est : $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3+5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

D'une part : pour $t = 0$, on a $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \times 0 = 0 \\ z = 3+5\times 0 = 3 \end{cases}$.

On reconnait les coordonnées du point D, donc D appartient à la droite $\mathscr{D}_1$.

D'autre part : un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ est donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ c'est à dire le vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est orthogonal au plan(ABC).

Donc la droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonal au plan (ABC).

Donc la droite $\mathscr{D}_1$ est bien la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

(b) Pour déterminer les points éventuels d'intersection des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ résolvons le système

(S) : $\begin{cases} t = 1+3s \\ 3t = -1-5s \\ 3+5t = 2-6s \end{cases}$

(S) $\iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 3\times(1+3s) = -1-5s \\ 3+5\times(1+3s) = 2-6s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 3+9s = -1-5s \\ 3+5+15s = 2-6s \end{cases}$

(S) $\iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1+3s = 1+3\times\dfrac{-2}{7} = \dfrac{1}{7} \\ s = -\dfrac{4}{14} = -\dfrac{2}{7} \\ s = -\dfrac{6}{21} = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$

Le système admet une unique solution donc les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes.

Remplaçons t par $\dfrac{1}{7}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}_1$

$\begin{cases} x = \dfrac{1}{7} \\ y = 3\times\dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{7} \\ z = 3+5\times\dfrac{1}{7} = \dfrac{26}{7} \end{cases}$

Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont donc sécantes et les coordonnées de leur point d'intersection sont $\left(\dfrac{1}{7}\,;\,\dfrac{3}{7}\,;\,\dfrac{26}{7}\right)$.

$\boxed{4}$ (a) Soit H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

H est donc l'intersection du plan (ABC) et de la hauteur issue de D dans le tétraèdre ABCD c'est à dire la droite $\mathscr{D}_1$.

Les coordonnées de H vérifient donc l'équation cartésienne du plan (ABC) et l'équation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$.

$t+3\times(3t)+5\times(3+5t)-8 = 0 \iff t+9t+15+25t-8 = 0 \iff 35t = -7 \iff t = -\dfrac{7}{35} = -\dfrac{1}{5}$

Remplaçons t par $-\dfrac{1}{5}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}_1$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{5} \\ y = 3 \times \dfrac{-1}{5} = -\dfrac{3}{5} \\ z = 3 + 5 \times \dfrac{-1}{5} = \dfrac{10}{5} = 2 \end{cases}$$

Le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) est le point H de coordonnées $\text{H}\left(-\dfrac{1}{5}\,;\,-\dfrac{3}{5}\,;\,2\right)$.

(b) La distance du point D au plan (ABC) est égale à la longueur DH car H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

$\text{DH}^2 = \left(-\dfrac{1}{5}-0\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{5}-0\right)^2 + (2-3)^2 = \dfrac{1}{25} + \dfrac{9}{25} + 1 = \dfrac{35}{25}$

$\text{DH}= \sqrt{\dfrac{35}{25}} = \sqrt{\dfrac{7}{5}} = \sqrt{\dfrac{14}{10}} = \sqrt{1{,}4}$ ou $\dfrac{\sqrt{35}}{5} \approx 1{,}183$ soit 1,18 au centième près.

Exercice 3 :

$\boxed{1}$ On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-(-1) \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-(-1) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $x_{\overrightarrow{AC}} = -3x_{\overrightarrow{AB}}$, mais $y_{\overrightarrow{AC}} \neq -3y_{\overrightarrow{AB}}$, les vecteurs sont donc non colinéaires, et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\boxed{2}$ (a) On sait que A, B et C ne sont pas alignés, et donc qu'ils définissent un plan. Pour montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires, il suffit de montrer que D est un point du plan (ABC), ce qui équivaut à prouver qu'un vecteur reliant un point du plan (ABC) au point D est coplanaire à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

Pas tout à fait au hasard (car on a regardé l'énoncé de la question suivante), on va choisir d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{CD}$ en fonction d'une base de (ABC) constituée des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dont on a déjà déterminé les coordonnées précédemment.

On a : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4-0 \\ 3-3 \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

On remarque que l'on a : $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ peut donc être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc c'est un vecteur du plan (ABC), et puisque C est dans le plan (ABC), on en déduit que D est également dans (ABC).

Finalement, puisque D est dans (ABC), les quatre points A, B, C et D sont bien coplanaires.

(b) À la question précédente, on a établi $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant colinéaires, les segments [AB] et [CD] sont portés par des droites parallèles (strictement, car C n'est pas aligné avec A et B).

ABCD est donc une figure plane (les quatre points étant coplanaires), c'est donc un quadrilatère, non croisé (puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens, cela signifie que ABDC est non croisé, ABCD serait un quadrilatère croisé), dont les côtés [AB] et [DC] sont parallèles : le quadrilatère ABDC est donc bien un trapèze, de bases [AB] et [DC].

$\boxed{3}$ (a) Comme on est dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé, on va utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer le produit scalaire :

— $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times (-1) = 2 + 0 - 2 = 0$: $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc orthogonaux ;

— $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-3) + 1 \times 4 + 2 \times 1 = -6 + 4 + 2 = 0$: $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont aussi orthogonaux ;

$\vec{n}$ étant orthogonal à une base (deux vecteurs non colinéaires) du plan (ABC), on en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

(b) $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ étant normal à (ABC), on en déduit que (ABC) admet une équation de la forme : $2x+y+2z+d=0$, où d est un réel donné.

De plus, $\text{A} \in (\text{ABC}) \iff 2x_{\text{A}}+y_{\text{A}}+2z_{\text{A}}+d=0$

$$\iff 2\times 3+(-1)+2\times 1+d=0$$
$$\iff 6-1+2+d=0$$
$$\iff d=-7$$

Finalement, une équation de (ABC) est : $2x+y+2z-7=0$.

(c) Si Δ est orthogonale à (ABC), cela signifie que $\vec{n}$, qui est normal à (ABC) doit diriger Δ. Et si la droite passe par S, de coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ 4)$, on en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x=x_{\text{S}}+x_{\vec{n}}t \\ y=y_{\text{S}}+y_{\vec{n}}t \\ z=z_{\text{S}}+z_{\vec{n}}t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \quad \text{ce qui donne ici :} \quad \begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \\ z=4+2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

(d) On nomme M_t le point de paramètre t sur la droite Δ.

$M_t \in (\text{ABC}) \iff 2x_{M_t}+y_{M_t}+2z_{M_t}-7=0$

$$\iff 2(2+2t)+(1+t)+2(4+2t)-7=0$$
$$\iff 4+4t+1+t+8+4t-7=0$$
$$\iff 9t+6=0$$
$$\iff t=\frac{-2}{3}$$

Il existe donc un unique point de Δ qui est sur le plan (ABC), c'est le point de paramètre $t=\dfrac{-2}{3}$ dans la représentation paramétrique. Ce point est donc le point I (ou bien $M_{\frac{-2}{3}}$), et a bien pour coordonnées : $\left(2+2\times\dfrac{-2}{3}\ ;\ 1+\dfrac{-2}{3}\ ;\ 4+2\times\dfrac{-2}{3}\right)=\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{8}{3}\right)$.

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a donc :

$$\text{SI}=\sqrt{(x_{\text{I}}-x_{\text{S}})^2+(y_{\text{I}}-y_{\text{S}})^2+(z_{\text{I}}-z_{\text{S}})^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{8}{3}-4\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{36}{9}}=\sqrt{4}=2$$

On arrive bien à SI = 2 unités graphique, et comme $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est d'unité graphique 1 cm, on a bien SI = 2 cm.

4 (a) Avec les coordonnées données pour H, on a $\overrightarrow{\text{BH}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{CH}}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$.

On a donc : $\overrightarrow{\text{CD}}\cdot\overrightarrow{\text{BH}}=4\times(-1)+0\times 4+(-4)\times -1=-4+0+4=0$, donc les vecteurs sont orthogonaux, et les droites (BH) et (CD) qu'ils dirigent sont orthogonales.

Par ailleurs : $\overrightarrow{\text{CH}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{CD}}$, les points C, H et D sont alignés, donc H est sur la droite (CD).

H est donc le point de la droite (CD) tel que (BH) est orthogonale à (CD), donc c'est bien le projeté orthogonal de B sur (CD).

On a $\text{BH}=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

La distance BH est bien égale à $3\sqrt{2}$ cm.

(b) On a donc besoin de connaître les longueurs des deux bases du trapèze :

— $\text{AB} = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ cm ;

— Comme on a $\overrightarrow{\text{CD}} = 4\times\overrightarrow{\text{AB}}$, on a notamment, $\text{CD} = |4|\times \text{AB} = 4\sqrt{2}$ cm.

L'aire du trapèze ABDC est donc : $\mathscr{A}_{\text{ABDC}} = \dfrac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2}\times 3\sqrt{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\times 3\sqrt{2} = 15\text{cm}^2$

$\boxed{5}$ Finalement, le volume de la pyramide est : $\mathscr{V}_{\text{ABDCS}} = \dfrac{1}{3}\times 15\times 2 = 10\text{cm}^2$.

Exercice 4 :

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Soit (d_1) la droite passant par $\text{A}(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x &= 0\\ y &= 1+t\\ z &= 2+t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

$\boxed{1}$ On a $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(d_1) \iff$ il existe $t'\in\mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{\text{A}M} = t'\overrightarrow{u_1} \iff$
$\begin{cases} x-1 &= 1t'\\ y-2 &= 2t'\\ z-(-1) &= 0t'\end{cases}\ t\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= 1+t'\\ y &= 2+2t'\\ z &= -1\end{cases}\ t\in\mathbb{R}.$

$\boxed{2}$ On démontre que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

- (d_2) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$: les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.
- (d_1) et (d_2) sont sécantes s'il existe t et t' deux réels tels que :

$\begin{cases} 0 &= 1+t'\\ 1+t &= 1+t'\\ 2+t &= -1\end{cases} \iff \begin{cases} -1 &= t'\\ t &= t'\\ t &= -3\end{cases}$: ce système n'a pas de solution.

Conclusion : les deux droites ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont donc non coplanaires.

$\boxed{3}$ Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

On va justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$.

Si un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient au plan défini par le point A et les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}$, on sait que il existe α et β tels que : $\overrightarrow{\text{A}M} = \alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{w}$,

soit avec les coordonnées : $\begin{cases} x-1 &= 1\alpha+2\beta\\ y-2 &= 2\alpha-1\beta\\ z+1 &= 0\alpha+1\beta\end{cases} \iff \begin{cases} x &= \alpha+2\beta+1\\ y &= 2\alpha-\beta+2\\ z &= \beta-1\end{cases}$

Or quels que soient α et β :

$-2(\alpha+2\beta+1)+1(2\alpha-\beta+2)+5(\beta-1)+5 = -2\alpha-4\beta-2+2\alpha-\beta+2+5\beta-5+5 = 0.$

Donc une équation cartésienne du plan est $-2x+1y+5z+5=0$.

$\boxed{4}$ (a) On a vu que (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires donc (d_2) ne peut appartenir au plan précédent et (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles donc la droite (d_2) est sécante au plan $\mathscr{P}$.

Autre méthode : d'après ses équations paramétriques un vecteur directeur de la droite (d_2)est le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et d'après l'équation de $\mathscr{P}$ un de ses vecteurs normaux est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5)\end{pmatrix}$.
Comme $\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{n}=0+1+5=6\neq 0$ ceci montre que (d_2) n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}$: (d_2) et $\mathscr{P}$ sont donc sécants.

(b) On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$.
Si F est commun à (d_2) et au plan $\mathscr{P}$ ses coordonnées vérifient le système :
$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 1+t\\ z &=& 2+t\\ -2x+y+5z+5 &=& 0\end{array}\right.$, d'où en remplaçant dans la dernière équation :
$-2\times 0+1+t+5(2+t)+5=0 \iff 1+t+10+5t+5=0 \iff 6t+16=0 \iff t=-\dfrac{8}{3}$,
d'où en remplaçant dans x, y, et z, on obtient F $\left(0\ ;\ -\dfrac{5}{3}\ ;\ -\dfrac{2}{3}\right)$.
Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}\ ;\ -\dfrac{4}{3}\ ;\ -1\right)$.

5 (a) Des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ on déduit que :
$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{u_1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}+0=0$ et $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{u_2}=0-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}=0.$
Conclusion : $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs des deux droites (d_1) et (d_2), E $\in(d_1)$ et F $\in(d_2)$ donc EF est bien la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

(b) On a $\mathrm{EF}^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{6}{9}$.
Conclusion : $\mathrm{EF}=\sqrt{\dfrac{6}{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Exercice 5 :

1 Dans le repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, on a les coordonnées suivantes pour les sommets du prisme droit :

A(0 ; 0 ; 0) B(4 ; 0 ; 0) C(4 ; 4 ; 0) D(0 ; 4 ; 0)
E(0 ; 0 ; 8) F(4 ; 0 ; 4) G(4 ; 4 ; 4) H(0 ; 4 ; 8)

I étant le milieu de [EF], on a I$\left(\dfrac{x_{\mathrm{E}}+x_{\mathrm{F}}}{2}\ ;\ \dfrac{y_{\mathrm{E}}+y_{\mathrm{F}}}{2}\ ;\ \dfrac{z_{\mathrm{E}}+z_{\mathrm{F}}}{2}\right)$, soit I(2 ; 0 ; 6).
J étant le milieu de [AE], on a de même : J(0 ; 0 ; 4).

2 (a) Si le plan est nommé (IGJ), cela signifie que les trois points I, G et J définissent le plan, et donc sont non alignés.
On a : $\overrightarrow{\mathrm{IG}}\begin{pmatrix}x_{\mathrm{G}}-x_{\mathrm{I}}\\y_{\mathrm{G}}-y_{\mathrm{I}}\\z_{\mathrm{G}}-z_{\mathrm{I}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ et de même : $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$.
Comme le repère est orthonormé, on peut calculer les produits scalaires à l'aide des coordonnées :

— $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IG}}=-1\times 2+1\times 4+1\times(-2)=-2+4-2=0$: $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{IG}}$.

— $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = -1 \times (-2) + 1 \times 0 + 1 \times (-2) = 2 + 0 - 2 = 0$: $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$.

Ainsi, $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ) : c'est donc un vecteur normal au plan.

(b) Une équation cartésienne d'un plan dont $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal est de la forme : $-1 \times x + 1 \times y + 1 \times z + d = 0$, soit $-x + y + z + d = 0$, où d est un réel quelconque.

Comme G est un point du plan (IGJ), on en déduit que la constante d dans ce cas doit être telle que :

$$\begin{aligned} -x_{\mathrm{G}} + y_{\mathrm{G}} + z_{\mathrm{G}} + d = 0 &\iff -4 + 4 + 4 + d = 0 \\ &\iff d = -4 \end{aligned}$$

Une équation de (IGJ) est donc : $-x + y + z - 4 = 0$.

$\boxed{3}$ Si d est perpendiculaire à (IGJ), alors elle est dirigée par $\overrightarrow{n}$, comme elle passe par H, elle admet comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_{\mathrm{H}} + t x_{\overrightarrow{n}} \\ y = y_{\mathrm{H}} + t y_{\overrightarrow{n}} \\ z = z_{\mathrm{H}} + t z_{\overrightarrow{n}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = -t \\ y = 4 + t \\ z = 8 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$\boxed{4}$ Si L est le projeté orthogonal de H sur (IGJ), cela veut dire que la droite (HL) est orthogonale au plan (et passe par H), et donc que la droite (HL) est la droite d. Comme L est un point du plan, c'est donc le seul point de d sur le plan.

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de d soit un point de (IGJ) :

$$\begin{aligned} M_t \in (\mathrm{IGJ}) &\iff -x_{M_t} + y_{M_t} + z_{M_t} - 4 = 0 \\ &\iff -(-t) + (4 + t) + (8 + t) - 4 = 0 \\ &\iff 3t + 8 = 0 \\ &\iff t = \frac{-8}{3} \end{aligned}$$

L est donc $M_{\frac{-8}{3}}$ sur la droite d : il a donc comme coordonnées $\mathrm{L}\left(-\frac{-8}{3} \,;\, 4 + \frac{-8}{3} \,;\, 8 + \frac{-8}{3}\right)$.

Cela confirme $\mathrm{L}\left(\frac{8}{3} \,;\, \frac{12-8}{3} \,;\, \frac{24-8}{3}\right)$

Autrement dit, le point L est bien le point de coordonnées $\left(\frac{8}{3} \,;\, \frac{4}{3} \,;\, \frac{16}{3}\right)$.

$\boxed{5}$ Par définition, la distance d'un point à un plan est la distance entre le point et son projeté orthogonal sur le plan, donc on cherche HL. Comme on travaille dans un repère orthonormé :

$$\mathrm{HL} = \sqrt{(x_{\mathrm{L}} - x_{\mathrm{H}})^2 + (y_{\mathrm{L}} - y_{\mathrm{H}})^2 + (z_{\mathrm{L}} - z_{\mathrm{H}})^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{192}{9}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

La distance de H au plan (IGJ) est donc de $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

$\boxed{6}$ Calculons : $\overrightarrow{\mathrm{IG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = 2 \times (-2) + 4 \times 0 + (-2) \times (-2) = -4 + 0 + 4 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ sont donc orthogonaux (et non nuls) donc les droites qu'ils dirigent, (IG) et (IJ) sont orthogonales (et perpendiculaires, car sécantes en I) : le triangle IGJ est donc rectangle en I.

$\boxed{7}$ Pour calculer le volume, on choisira IGJ comme base (car le triangle étant rectangle, son aire est simple à calculer) et donc la hauteur correspondante est la distance du quatrième sommet (H) au plan (IGJ) (distance qui a été calculée à la question **5.**).

$\mathrm{IG} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\mathrm{IJ} = \sqrt{(-2)^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

L'aire du triangle IGJ est donc : $\mathscr{A}_{\mathrm{IGJ}} = \frac{\mathrm{IG} \times \mathrm{IJ}}{2} = \frac{2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Le volume du tétraèdre est donc : $V = \dfrac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times \dfrac{8\sqrt{3}}{3} = \dfrac{32}{3}$.

Le volume du tétraèdre est de $V = \dfrac{32}{3}$ (soit environ 10,7, au dixième près).