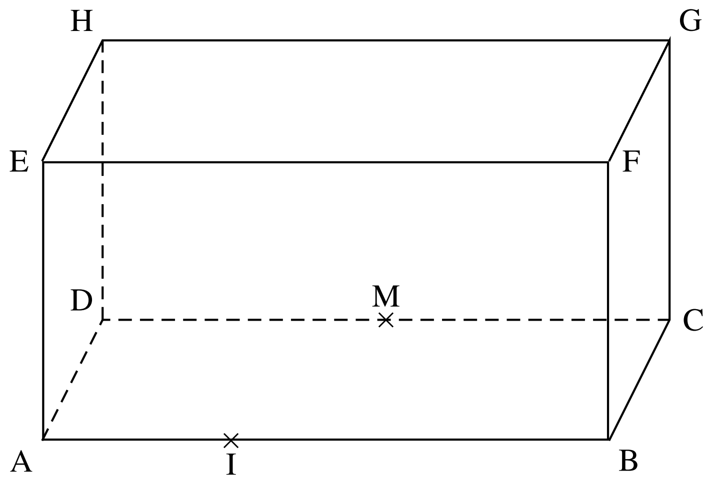
Exercice 1 :

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-dessous.



On considère le point I du segment [AB] tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment [CD].
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :
   $$2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

   (c) Le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).
   Déterminer les coordonnées du point N.

5. Le point R de coordonnées $\left(3\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ?
   Justifier la réponse.

Exercice 2 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

- les points $A(-2\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $B(-1\ ;\ 3\ ;\ 0)$, $C(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$ et $D(0; 0; 3)$.
- la droite $\mathscr{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

- la droite $\mathscr{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x &= 1+3s \\ y &= -1-5s \\ z &= 2-6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1 Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

(b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+3y+5z-8=0.$$

(c) En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3 (a) Justifier que la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.
On admet que la droite $\mathscr{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.

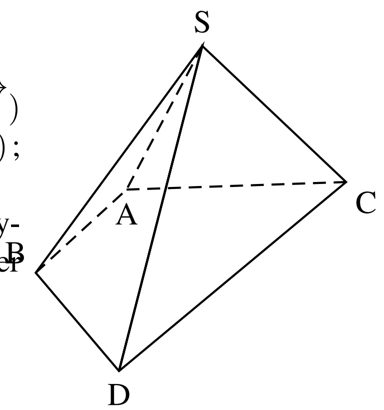
(b) Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4 (a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

(b) Calculer la distance du point D au plan (ABC). Arrondir le résultat au centième.

Exercice 3 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points : A$(3\ ;\ -1\ ;\ 1)$; B$(4\ ;\ -1\ ;\ 0)$; C$(0\ ;\ 3\ ;\ 2)$; D$(4\ ;\ 3\ ;\ -2)$ et S$(2\ ;\ 1\ ;\ 4)$.
Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1 Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 (a) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

(b) Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.

3 (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(2\ ;\ 1\ ;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

(b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

(c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).

(d) On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$, puis montrer que SI $= 2$ cm.

4 (a) Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H$(3\ ;\ 3\ ;\ -1)$ et montrer que HB $= 3\sqrt{2}$ cm.

(b) Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.

On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathscr{A} = \frac{b+B}{2} \times h$$

où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.

5 Déterminer le volume de la pyramide SABDC.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \text{ aire de la base} \times \text{hauteur.}$$

Exercice 4 :

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.
Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment [EF], où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et (d_2).
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (d_1) la droite passant par A$(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ de vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 1+t \\ z &= 2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1 Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1)

2 Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

3 Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u_1}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$.

4 (a) Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.
(b) On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$.
Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0\ ;\ -\frac{5}{3}\ ;\ -\frac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{4}{3}\ ;\ -1\right)$.

5 (a) Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).
(b) Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

Exercice 5 :

On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.

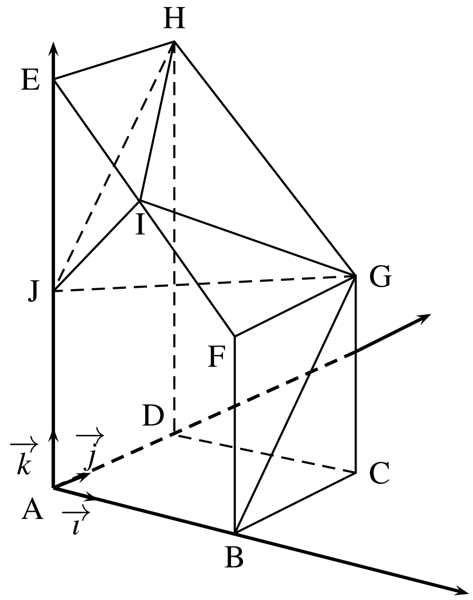
On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \quad \vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}.$$

De plus on a $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

On note I le milieu du segment [EF].

On note J le milieu du segment [AE].



1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).

   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.

4. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).

   Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3} ; \frac{4}{3} ; \frac{16}{3}\right)$.

5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).

6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.

7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$