Équations différentielles

Corrigés

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1 L'équation différentielle est de la forme $y' = ay$ avec $a = -0,1$.
Les solutions sont données par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} = k\,\mathrm{e}^{-0,1x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

2 L'équation différentielle est de la forme $y' = ay$ avec $a = \frac{5}{3}$. En effet,

$$3y' = 5y \Leftrightarrow y' = \frac{5}{3}y.$$

Les solutions sont données par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} = k\,\mathrm{e}^{\frac{5}{3}x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

3 L'équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 8$ et $b = 5$.
Les solutions sont données par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{8x} - \frac{5}{8}$ où $k \in \mathbb{R}$.

4 L'équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$. En effet,
$2y + 3y' - 1 = 0 \Leftrightarrow 3y' + 2y = 1 \Leftrightarrow y' = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$.

Les solutions sont données par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

15 mg de pénicilline sont injectés dans le sang d'un patient.
On suppose que l'injection est instantanée et que la vitesse de son élimination est proportionnelle à la quantité restant dans le sang.
On note t le temps écoulé, en minute, après injection de la pénicilline, et $f(t)$ la quantité, en milligramme, de pénicilline présente dans le sang à l'insistant t.
La fonction f, ainsi définie, est la solution de l'équation différentielle $y' = -0,04y$ telle que $f(0) = 15$.

1 • L'équation différentielle est de la forme $y' = ay$ avec $a = -0,04$.
Les solutions sont données par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{at} = k\,\mathrm{e}^{-0,04t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
• Or, $f(0) = 15 \Leftrightarrow k\,\mathrm{e}^{0} = 15$. Donc, $k = 15$.
La solution cherchée est donc définie par $f(t) = 15\,\mathrm{e}^{-0,04t}$.

2 $f(40) = 15\,\mathrm{e}^{-0,04\times 40} \approx 3,03$ mg.

3 $f'(t) = 15\left(-0,04\,\mathrm{e}^{-0,04t}\right) = -0,6\,\mathrm{e}^{-0,04t}$.
Or, pour tout réel t, $f'(t) < 0$ car un exponentiel est toujours strictement positif.
Donc f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

4 On sait que : $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -0,04t = -\infty \\ \lim\limits_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,04t} = 0$.
En conséquence, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

5 Quantité moyenne est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{30-0}\int_0^{30} f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{30}\int_0^{30} 15\,\mathrm{e}^{-0,04t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{30}\left[\frac{15}{-0,04}\mathrm{e}^{-0,04t}\right]_0^{30} \\
&= \frac{1}{30}\left[-375\,\mathrm{e}^{-0,04t}\right]_0^{30} \\
&= \frac{1}{30}\left[-375\,\mathrm{e}^{-1,2}+375\right] \\
&= -12,5\,\mathrm{e}^{-1,2}+12,5 \\
&\approx 8,73mg.
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

On note $N(t)$, la vitesse de rotation angulaire (en tours par minute) à l'instant t (en minutes) d'un disque lorsque sa rotation est freinée par un certain liquide.
Sachant que N est la solution de l'équation différentielle $y' = -(\ln 100)y$ telle que $N(0) = 1500$:

1 L'équation différentielle est de la forme $y' = ay$ avec $a = -\ln 100$.
Les solutions sont données par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-at} = k\,\mathrm{e}^{-(\ln 100)t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
$N(t)$ est donc de la forme $N(t) = k\,\mathrm{e}^{-(\ln 100)t}$.
Or, $N(0) = 1500$, donc $N(0) = 1500 \Leftrightarrow k\,\mathrm{e}^0 = 1500 \Leftrightarrow k = 1500$.
La solution cherchée est donc définie par $N(t) = 1500\,\mathrm{e}^{-(\ln 100)t}$.

2 $N(1) = 1500\,\mathrm{e}^{-(\ln 100)} = 1500\,\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{100}\right)} = 1500 \times \dfrac{1}{100} = 15$ tours par minute.

3 Cela revient à chercher t tel que $N(t) = 1$.

$$\begin{aligned}
N(t) = 1 &\Leftrightarrow 1500\,\mathrm{e}^{-(\ln 100)t} = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-(\ln 100)t} = \frac{1}{1500} \\
&\Leftrightarrow -(\ln 100)t = \ln\left(\frac{1}{1500}\right) \\
&\Leftrightarrow -(\ln 100)t = -(\ln 1500) \\
&\Leftrightarrow t = \frac{\ln 1500}{\ln 100} \\
&\approx 1,6 \text{ minutes.}
\end{aligned}$$

Exercice 4 :

1 L'équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,0001$ et $b = 0,01$.
Les solutions sont données par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{-0,0001t} + \dfrac{0,01}{0,0001} = k\,\mathrm{e}^{-0,0001t} + 100$ où $k \in \mathbb{R}$.
Or, $f(0) = 20$ donc $f(0) = 20 \Leftrightarrow k\,\mathrm{e}^0 + 100 = 20 \Leftrightarrow k = -80$.
La solution cherchée est donc définie par $f(t) = -80\,\mathrm{e}^{-0,0001t} + 100$.

2 On sait que :
$\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} -0,0001t = -\infty \\ \lim\limits_{T \to -\infty} \mathrm{e}^T = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,0001t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} -80\,\mathrm{e}^{-0,0001t} = 0$.
En conséquence, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 100$.

3 Pour tout $t \in];+\infty[$, $f'(t) = -80\left(-0,0001\,\mathrm{e}^{-0,0001t}\right) = 0,008\,\mathrm{e}^{-0,0001t} > 0$.
f est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

4 Cela revient à chercher t tel que $f(t) = 85$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
-80\,\mathrm{e}^{-0,0001t} + 100 = 85a &\Leftrightarrow a - 80\,\mathrm{e}^{-0,0001t} = -15 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,0001t} = \frac{15}{80} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,0001t} = 0,1875 \\
&\Leftrightarrow -0,0001t = \ln(0,1875) \\
&\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,1875)}{-0,0001} \\
&\approx 16740 \ \text{ secondes.}
\end{aligned}$$

Ce qui correspond à 4 heures et 39 minutes.

Exercice 5 :

Après de violents orages, des eaux de ruissellement contenant 4% de pesticides se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade. Un système d'évacuation permet de maintenir dans la bassin un volume d'eau constant de 30 000 litres.

1 L'équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,005$ et $b = 6$.
Les solutions sont données par :
$f(t) = k\,\mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{-0,005t} + 1200$ où $k \in \mathbb{R}$.
Or, $f(0) = 0$ donc $f(0) = 0 \Leftrightarrow k\,\mathrm{e}^{0} + 1200 = 0 \Leftrightarrow k = -1200$.
La solution cherchée est ainsi définie par $f(t) = -1200\,\mathrm{e}^{-0,005t} + 1200$

2 2% correspond à un volume de $\dfrac{2}{100} \times 30000 = 600$ litres.
On cherche donc t tel que $f(t) = 600$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
-1200\,\mathrm{e}^{-0,005t} + 1200 = 600 &\Leftrightarrow -1200\,\mathrm{e}^{-0,005t} = -600 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,005t} = 0,5 \\
&\Leftrightarrow -0,05t = \ln 0,5 \\
&\Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,5}{-0,005} \\
&\approx 139 \quad \text{minutes.}
\end{aligned}$$