Suites

Terminale Spé

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

Modes de générations

Il existe deux façons de définir une suite :

- par une relation $u_n = f(n)$, ou relation explicite ;
- par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, ou relation de récurrence.

Exemple 1 : $(u_n = f(n))$

$u_n = 50 + 1,5n$

$u_0 = 50 + 1,5 \times 0 = 50$ $\qquad$ $u_1 = 50 + 1,5 \times 1 = 51,5$

$u_2 = 50 + 1,5 \times 2 = 53.$

Exemple 2 : par récurrence $(u_{n+1} = f(u_n))$

$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1$

$u_0 = 1$

$u_1 = 2 \times u_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$

$u_2 = 2 \times u_1 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$

$u_3 = 2 \times u_2 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15.$

Rappels : Définitions et formules

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors :

- $u_{n+1} = u_n + r$;
- $u_n = u_0 + nr$;
- $u_n = u_p + (n-p)r$, pour tout entier naturel p tel que $p \leqslant n$.

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors :

- $u_{n+1} = q \times u_n$;
- $u_n = u_0 \times q^n$;
- $u_n = u_p \times q^{n-p}$, pour tout entier naturel p tel que $p \leqslant n$.

Sommes de termes successifs

Suite arithmétique

- $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$.
- $\dfrac{\text{Nb. de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$.

Suite géométrique

- $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- $\text{premier terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$.

Exemple d'une suite auxiliaire

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$v_n = u_n + 10 \qquad \text{et} \quad u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1} - 5.$

(v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. En effet,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} + 10 \qquad \text{or} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5 \\
&= \left(\frac{1}{2}u_n - 5\right) + 10 \\
&= \frac{1}{2}u_n + 5 \quad \text{or } v_n = u_n + 10 \text{ donc } u_n = v_n - 10 \\
&= \frac{1}{2}(v_n - 10) + 5 \\
&= \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2} \times 10 + 5 \\
&= \frac{1}{2}v_n - 5 + 5 \\
&= \frac{1}{2}v_n.
\end{aligned}$$

Raisonnement par récurrence

Méthode

On veut démontrer une propriété $P(n)$.

- **Initialisation :** on justifie que la propriété $P(0)$ est vraie
- **Hérédité :** on démontre que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie
- **Conclusion :** on rappelle l'on a démontré que $P(0)$ est vraie
  et que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.
  On en conclut que pour tout entier naturel n la propriété $P(n)$ est vraie.

Exemple

Démontrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n) : 2^n > n$, pour tout entier naturel non nul.

- *Initialisation.*
  $2^1 = 2 > 1$. La propriété est donc vraie pour $n = 1$.
- *Hérédité.*
  Supposons que pour un certain entier k fixé supérieur ou égal à 1, $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $2^k > k$ (HR) et démontrons que $2^{k+1} > k+1$.

$$\begin{aligned} 2^k &> k \qquad \text{d'après (H.R.)} \\ 2 \times 2^k &> 2 \times k \\ 2^{k+1} &> k+1 \qquad \text{car,} \qquad k \geqslant 1. \end{aligned}$$

  Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.
- *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n > 0$.

Sens de variation

Définitions

- La suite (u_n) est croissante si pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- La suite (u_n) décroissante si pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Méthodes possibles

- Démontrer que $u_{n+1} \geqslant u_n$ ou que $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Si la suite est définie sous la forme $u_n = f(n)$, étudier le sens de variation de la fonction f.

Suites arithmétiques et géométriques

Propriété

- Une suite arithmétique de raison positive est croissante.
- Une suite arithmétique de raison négative est décroissante.

Propriété

- Si $q < 0$ la suite (q^n) n'est ni croissante, ni décroissante.
- Si $q = 0$ la suite (q^n) est constante.
- Si $0 < q < 1$ la suite (q^n) est décroissante.
- Si $q = 1$ la suite (q^n) est constante.
- Si $q > 1$ la suite (q^n) est croissante.

Définition

Dire qu'une suite (u_n) est **majorée** signifie qu'il existe un nombre réel M tel que tous les termes de cette suite sont inférieurs ou égaux à M : $u_n \leqslant M$.

Définition

Dire qu'une suite (u_n) est **minorée** signifie qu'il existe un nombre réel m tel que tous les termes de cette suite sont supérieurs ou égaux à m : $u_n \geqslant m$.

Définition

Dire qu'une suite est **bornée** signifie que cette suite est majorée et minorée.

Définition

On dit que la suite (u_n) *converge* vers un réel ℓ si u_n se rapproche de plus en plus de ℓ quand n tend vers $+\infty$.
On écrit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Définition

- On dit que la limite de (u_n) est $+\infty$ si u_n prend des valeurs de plus en plus grandes. On écrira alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que la limite de (u_n) est $-\infty$ si la suite $(-u_n)$ tend vers $+\infty$. On écrira alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0 car plus n prend de grandes valeurs positives, plus $\dfrac{1}{n}$ se rapproche de 0.

Convergente, divergente

Vocabulaire

- Une suite **convergente** est une suite qui a une limite finie ℓ.
- Une suite **divergente** est une suite qui n'est pas convergente, c'est à dire
  - une suite qui tend vers l'infini
  - ou une suite qui n'a pas de limite.

Propriété : Suites de références

- Les suites (n), (n^2), (n^3), $(\sqrt{n})$, ont pour limite $+\infty$.
- Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{n^3}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, ont pour limite 0.

Propriétés de convergence d'une suite monotone

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$
- Toute suite décroissante et minorée converge.
- Toute suite décroissante non majorée diverge vers $-\infty$
- Toute suite monotone et bornée converge.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{n-1}{n+4}$.

1. Montrer que (u_n) est majorée par 1.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n - 1 = \dfrac{n-1}{n+4} - 1 = \dfrac{n-1-(n+4)}{n+4} = \dfrac{-5}{n+4}$. Ainsi, $u_n - 1 < 0$ soit $u_n < 1$. Autrement dit, (u_n) est majorée par 1.
2. Montrer que (un) est croissante.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{n+5} - \frac{n-1}{n+4} = \frac{n(n+4)-(n-1)(n+5)}{(n+5)(n+4)} = \frac{5}{(n+5)(n+4)}.$$
   Ainsi, $u_{n+1} - u_n > 0$. Autrement dit, (u_n) est strictement croissante.
3. En déduire que (u_n) converge.
   La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 1. Donc (u_n) converge.

Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et soit n_0 un entier naturel.

- Si, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \geqslant u_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si, pour $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Exemples

1. Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$. Alors, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
2. Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant -n^2$. Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème des gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites, et ℓ est un réel. On suppose que :

- il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$.

Alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Donc, $\dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Soit, $\dfrac{-1}{n} + 3 \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} + 3 \leqslant \dfrac{1}{n} + 3$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} + 3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} + 3 = 3$, donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Limite d'une somme

- ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.
- FI (*forme indéterminée*) : on ne peut pas conclure.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit ou d'un quotient

- ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.
- Pour le signe, appliquer la règle des signes.
- FI (*forme indéterminée*) : on ne peut pas conclure.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	∞	∞	FI

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	0	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	0	∞	0	$\ell' \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	0	FI	∞	∞	FI