Loi binomiale

Terminale Spé

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

Règles de base

Pour deux évènements A et B, on a :

- $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$
- $p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A})$
- $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

Définition

Quand $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$, on dit que les évènements A et B sont **incompatibles**.

Propriété

Pour deux évènements **incompatibles** A et B, on a :

- $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$
- $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$.

Propriété

Quand les issues d'une expérience aléatoire sont équiprobables, la probabilité d'un évènement est égale à :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Propriété

Dans le cas d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

Exemple :

On tire au hasard un nombre entier entre 0 et 9, puis une lettre au hasard, puis un signe au hasard parmi $\bigcirc$, $\diamondsuit$, $\triangle$.

Quelle est la probabilité d'obtenir le code `5F`$\triangle$?

$$\begin{aligned} p(\text{« 5F}\triangle\text{ »}) &= p(\text{« 5 »}) \times p(\text{« F »}) \times p(\text{« }\triangle\text{ »}). \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{1}{26} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{780}}. \end{aligned}$$

Définition

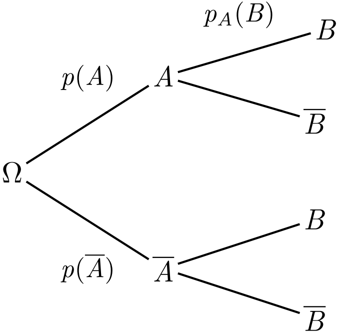
Probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant A :

$$p_A(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})} \qquad (p(A) \neq 0).$$

Conséquence

$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p_A(\mathrm{B})$

Arbre pondéré



$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

Tableau de probabilités

	B	$\overline{B}$	Total
A	$p(A \cap B)$	$p(A \cap \overline{B})$	$p(A)$
$\overline{A}$	$p(\overline{A} \cap B)$	$p(\overline{A} \cap \overline{B})$	$p(\overline{A})$
Total	$p(B)$	$p(\overline{B})$	1

Définition

Dire que deux évènements A et B sont indépendants signifie que $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$.

Propriété

Si deux évènements A et B sont indépendants
et si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$
alors $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B})$ et $p(\mathrm{A}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.

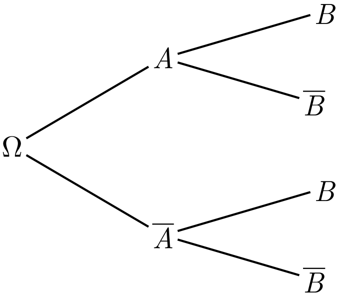
Propriété

Si deux événements A et B sont indépendants,
alors les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration

Nous savons que : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Nous voulons démontrer que : $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p(B)$.



On sait que : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$

Donc :

$$\begin{aligned} p(B \cap \overline{A}) &= p(B) - p(B \cap A) \\ &= p(B) - p(B) \times p(A) \\ &= p(B) \times (1 - p(A)) \\ &= p(B) \times p(\overline{A}). \end{aligned}$$

Définition - Loi de probabilité

X	x_1	x_2	...	x_n	Total
p	p_1	p_2	...	p_n	1

Espérance – Variance – Écart-type

- Espérance : $\mathrm{E(X)} = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$
- Variance :
  $\mathrm{V(X)} = p_1\left(x_1 - \mathrm{E(X)}\right)^2 + \cdots + p_n\left(x_n - \mathrm{E(X)}\right)^2$
- Écart-type : $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$

Propriété

Quand on répète un grand nombre de fois une épreuve aléatoire, la moyenne est proche de l'espérance.

Propriété

$E(aX+b) = aE(X) + b \qquad V(aX) = a^2V(X)$
$\sigma(aX) = |a| \times \sigma(X)$.

Définition – Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues,
l'une appelée succès S, l'autre échec $\overline{S}$.
$p(S) = p \quad p(\overline{S}) = 1 - p$

Définition – Schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition – Loi binomiale

- Schéma de Bernoulli à n répétitions
- X variable aléatoire égale au nombre de succès.

La loi de probabilité de cette variable aléatoire est appelée **loi binomiale de paramètres n et p**.

Définition – Coefficient binomial

Le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions se note $\binom{n}{k}$ et est appelé coefficient binomial.

Propriété

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Propriété

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Propriété

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$