Logarithme népérien

Terminale Spé

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

Définition

On définit la fonction *logarithme népérien* comme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle, autrement dit l'unique fonction :

$$\ln \ : \ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

pour laquelle,

$$\forall x > 0, \ \ e^{\ln x} = ln\left(e^x\right) = x.$$

Propriété

Soient $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y.$$

Exemple

$e^x = 7 \Leftrightarrow x = \ln 7.$

Propriété

La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{pour tout } x > 0.$$

Remarque

De la dérivée du logarithme népérien, on peut en déduire la propriété suivante.

Propriété

La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est strictement croissante et concave $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété

Pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\ln x = \ln y \Longleftrightarrow x = y \qquad \text{et} \qquad \ln x < \ln y \Longleftrightarrow x < y.$$

Exemples

1. $$\begin{aligned} \ln(x^2+7) = \ln(2x^2+3) &\Leftrightarrow x^2+7 = 2x^2+3 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2. \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} \ln(x^2+10) > \ln(2x^2+1) &\Leftrightarrow x^2+10 > 2x^2+1 \\ &\Leftrightarrow x^2 < 9 \\ &\Leftrightarrow x \in [-3\ ;\ 3]. \end{aligned}$$

Remarque

Dans la résolution d'équations ou d'inéquations avec des logarithmes, il faut toujours s'assurer que les opérandes soient strictement positives. Dans notre premier exemple, $x^2+7>0$ et $2x^2+3>0$ pour tout réel x ; on peut ainsi résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour l'inéquation.

Propriétés

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Remarque

L'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe représentative de la fonction logarithme.

Propriétés

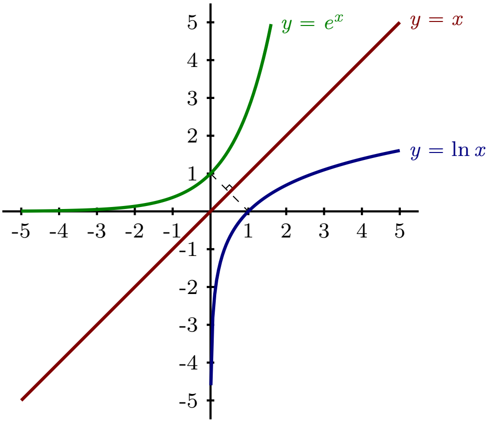
Pour tout entier naturel n, on a :

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0.$

Remarque

On dit qu'en cas d'indétermination, les puissances de x « l'emportent » sur $\ln x$.

De la stricte croissante de la fonction ln, de sa concavité, de ses limites et des valeurs remarquables du logarithme népérien, on déduit sa représentation graphique dans un repère orthonormé :



Important !

Du fait que les fonctions exp et ln sont réciproques, on déduit que, dans un repère orthonormé, leur courbe représentative sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable à valeurs strictement positives sur un intervalle I. Ainsi, sur I :

$$\big(\ln(u)\big)' = \frac{u'}{u}.$$

Exemple

Soit $f(x) = \ln(e^x + 1)$.
Alors, $f(x) = \ln\big[u(x)\big]$ avec $u(x) = e^x + 1$ et $u'(x) = e^x$.
D'où :

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$