Tle Spé | **Devoir Surveillé n° 9** | Lycée
maths-mde.fr | **.../20** - 1 h | Evariste Galois

Exercice 1 : (15 points)

Partie A : On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(x^2\right) + x - 2.$$

1 Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

2 On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

3 **a** Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que $g(\alpha) = 0$.
b Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4 En déduire le tableau de signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x}\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 **a** Déterminer la limite de la fonction f en 0.
b Interpréter graphiquement le résultat.

2 Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3 On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

4 En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C : Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 2 : (5 points)

Les cinq questions sont indépendantes.

1 Déterminer le plus petit entier positif n vérifiant la relation donnée, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 0{,}01$.

2 Résoudre l'équation suivante : $2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 = 0$.

3 Résoudre l'inéquation suivante : $\ln(x^2 + x - 6) > \ln(-2x^2 + 14x + 16)$.

4 Calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x+1}}\right)$.

5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Déterminer la limite en $-\infty$ de $f(x) - (x+1)$. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?