Devoir Surveillé n° 9

Corrigé

Exercice 1 : (15 points)

Partie A : On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(x^2\right) + x - 2$$

1 $\rightsquigarrow$ On sait que : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x^2) = -\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0}(x-2) = -2$. Ainsi, par somme de limites, on obtient : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.

$\rightsquigarrow$ On sait que : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-2) = +\infty$. Ainsi, par somme de limites, on obtient : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

2 **<u>Première méthode :</u>** Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, on a $g(x) = 2\ln x + x - 2$.

Dès lors, $g'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{2+x}{x}$.

Étant donné que $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est alors celui de $2 + x$.

Or $x > 0$ implique que $2 + x > 2 > 0$, donc $g'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

En conséquence, La fonction g est alors strictement croissante sur sur $]0\ ;\ +\infty[$.

<u>Deuxième méthode :</u> Posons : $u(x) = x^2$. Ainsi, $u'(x) = 2x$.

Par ailleurs, $(\ln(u(x)))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Donc, Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $\left(\ln(x^2)\right)' = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$.

Dès lors, $g'(x) = \dfrac{2}{x} + 1 = \dfrac{2+x}{x}$.

Étant donné que $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est alors celui de $2 + x$.

Or $x > 0$ implique que $2 + x > 2 > 0$, donc $g'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

En conséquence, La fonction g est alors strictement croissante sur sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3 **a** On sait que :

- g est une fonction continue sur $]0\ ;\ +\infty[$ car dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. En effet, toute fonction dérivable est continue. Attention la réciproque est fausse !
- D'après la question précédente g est strictement croissante.
- De plus, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty < 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty > 0$.

Ainsi, selon le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc un réel unique $\alpha \in]0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

b En utilisant la méthode du balayage avec la calculatrice, on obtient :

- $g(1) = -1$ et $g(2) \approx 1{,}4$, donc $1 < \alpha < 2$;
- $g(1{,}3) \approx -0{,}175$ et $g(1{,}4) \approx 0{,}07$, donc $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$;
- $g(1{,}37) \approx -0{,}0004$ et $g(1{,}38) \approx 0{,}02$, donc $1{,}37 < \alpha < 1{,}38$.

4 Des questions précédentes, on déduit le tableau de signe suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie B : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x}\ln(x)$$

1 **a** On sait que : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}(x-2) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \end{cases}$ donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x-2)}{x} = -\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$. Ainsi, par produit de limites, on obtient : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

b Le résultat précédent signifie que la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2 $\rightsquigarrow$ Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a : $\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x} = 1 - \frac{2}{x}$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1$ car, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$.

$\rightsquigarrow$ Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

En conséquence, par produit de limites, on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3 Posons : $a(x) = x - 2$, $b(x) = x$ et $c(x) = \dfrac{x-2}{x}$. Ainsi, $a'(x) = -1$ et $b'(x) = 1$ et par dérivation du quotient de deux fonctions, on a :

$$\begin{aligned} c'(x) &= \frac{a'(x)b(x) - a(x)b'(x)}{b^2(x)} \\ &= \frac{1 \times x - 1 \times (x-2)}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, par dérivation du produit de deux fonctions, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= c'(x) \times \ln(x) + c(x) \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{2}{x^2} \ln x + \frac{x-2}{x^2} \\ &= \frac{2\ln x + x - 2}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

4 Par ailleurs, $x^2 > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$. Ainsi, le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle est le même que celui de $g(x)$.

On déduit alors de partie A que :

$\rightsquigarrow$ Pour tout $x \in]0\ ;\ \alpha[$, $g(x) < 0$. Autrement dit, la fonction f est donc décroissante sur $]0\ ;\ \alpha[$;

$\rightsquigarrow$ Pour tout $x \in]\alpha\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$. Autrement dit, la fonction f est donc croissante sur $]\alpha\ ;\ \infty[$.

Partie C : Pour tout $x \in]0;+[$, La position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln est donnée par le signe de la fonction d.

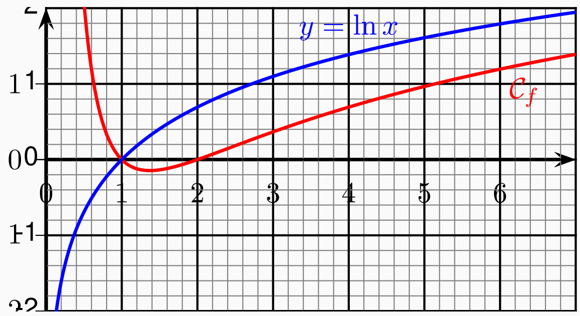
$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - \ln(x) \\ &= \frac{(x-2)}{x} \ln(x) - \ln(x) \\ &= \ln(x) \left[\frac{(x-2)}{x} - 1\right] \\ &= \ln(x) \left[\frac{x-2-x}{x}\right] \\ &= \frac{-2\ln(x)}{x}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, le signe de $d(x)$ est celui de la fonction $x \longmapsto -2\ln x$. Ci-après le tableau de signe de cette dernière fonction.

x	0		1		$+\infty$
-2		$-$		$-$	
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$-$	
$-2\ln(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$d(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Conclusion :

- ⇝ Sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.
- ⇝ Sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ la courbe $\mathcal{C}_f$ est la courbe $\mathcal{C}_f$ est située est située en dessous de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.



Exercice 2 : (5 points)

Les cinq questions sont indépendantes.

1 Pour entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 0{,}01 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \leqslant \ln(0{,}01) \\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{n \ln\left(\frac{1}{3}\right)}_{<0} \leqslant \ln(0{,}01) \\
&\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}.
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 4{,}19$. Donc, le plus petit entier qui convient est $n = 5$.

2 $2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 = 0$. Posons $X = \ln x$.
L'équation devient $2X^2 - 5X - 3 = 0$.
Le discriminant de cette équation est égal à : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49$.
Δ étant > 0, cette dernière équation admet pour deux solutions : $X = \dfrac{5-7}{4} = -\dfrac{1}{2}$ ou $X = \dfrac{5+7}{4} = 3$.
Ainsi, $\ln x = 3$ ou $\ln x = -\dfrac{1}{2}$.
Soit, $x = e^3$ ou $x = e^{-0{,}5} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.
En conséqeunce, l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{e^3\ ;\ e^{-0{,}5}\right\}$.

3 $\ln(x^2 + x - 6) > \ln(-2x^2 + 14x + 16)$.

— **Domaine de définition :** le polynôme x^2+x-6 admet pour racines 2 et -3 donc il est strictement positif sur $I =]-\infty; -3[\, \cup\,]2; +\infty[$.
Le polynôme $-2x^2 + 14x + 16$ admet pour racines -1 et 8 donc il est strictement positif sur $J =]-1; 8[$.

Le domaine de définition est donc $I \cap J$, soit $\mathcal{D} =]2; 8[$.

— **Résolution :** Pour tout $x \in]2; 8[$, on a :

$$\begin{aligned}
&\ln(x^2 + x - 6) > \ln(-2x^2 + 14x + 16) \\
\Longleftrightarrow\ & x^2 + x - 6 > -2x^2 + 14x + 16 \\
\Longleftrightarrow\ & 3x^2 - 13x - 22 > 0.
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $3x^2 - 13x - 22$ est $\Delta = 169 - 4 \times 3 \times (-22) = 433$.

Δ étant > 0, ce trinôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{13 - \sqrt{433}}{6} \notin \mathcal{D}$ et $x_2 = \dfrac{13 + \sqrt{433}}{6} \in \mathcal{D}$.

Ainsi, $3x^2 - 13x - 22 > 0$ sur $\mathcal{U} =]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$.

En conséquence, l'ensemble solution de l'inéquation est : $\mathcal{U} \cap \mathcal{D}$, soit $\mathcal{S} = \left]\dfrac{13+\sqrt{433}}{6}; 8\right[$

$\boxed{4}$ Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x+1}} &= \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}} \times \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1-(x+1)} \\
&= \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{-x} \\
&= \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{-\sqrt{x}\times\cancel{\sqrt{x}}} \\
&= \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \left(-\frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x}}\right).
\end{aligned}$$

De plus, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$.

Par ailleurs, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} -\left(1+\sqrt{x+1}\right) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty \end{cases}$ donc, par produit de limites, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x}} = -\infty$.

En consquence, par produit, on obtient :

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x+1}}\right) = -\infty.$$

$\boxed{5}$ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) - (x+1) &= x + 1 + \frac{2}{x-1} - (x+1) \\
&= \frac{2}{x-1}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} (x-1) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to -\infty} \dfrac{2}{X} = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$.

En conséquence, la fonction f admet une asymptote oblique, en $-\infty$, d'équation $y = x + 1$.