Devoir Surveillé n° 8

.../20 - 1 h 30 min

Lycée
Evariste Galois

Exercice 1 : (10 points)

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment. Dans cet exercice on s'intéresse à des personnes venues séjourner dans un centre multisports au cours du week-end. Les résultats des probabilités demandées seront arrondis au millième si nécessaire.

Partie A : Le centre propose aux personnes venues pour un week-end une formule d'initiation au roller composée de deux séances de cours. On choisit au hasard une personne parmi celles ayant souscrit à cette formule. On désigne par A et B les évènements suivants :

- A : « La personne chute pendant la première séance » ;
- B : « La personne chute pendant la deuxième séance ».

Pour un évènement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et $\overline{E}$ son évènement contraire. Des observations permettent d'admettre que $P(A) = 0{,}6$. De plus on constate que :

- Si la personne chute pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de 0,3 ;
- Si la personne ne chute pas pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de 0,4.

1 Représenter la situation par un arbre pondéré.

2 Calculer la probabilité $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$ et interpréter le résultat.

3 Montrer que $P(B) = 0{,}34$.

4 La personne ne chute pas pendant la deuxième séance de cours.
Calculer la probabilité qu'elle n'ait pas chuté lors de la première séance.

5 On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, associe le nombre d'entre elles n'ayant chuté ni lors de la première ni lors de la deuxième séance.

On assimile le choix d'un échantillon de 100 personnes à un tirage avec remise.

On admet que la probabilité qu'une personne ne chute ni lors de la première ni lors de la deuxième séance est de 0,24.

(a) Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) Quelle est la probabilité d'avoir, dans un échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, au moins 20 personnes qui ne chutent ni lors de la première ni lors de la deuxième séance ?

(c) Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : On choisit au hasard une personne venue un week-end au centre multisport. On note T_1 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du samedi et T_2 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minutes avant les accès aux activités sportives pendant la journée du dimanche. On admet que :

- T_1 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_1) = 40$ et d'écart-type $\sigma(T_1) = 10$;
- T_2 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_2) = 60$ et d'écart-type $\sigma(T_2) = 16$;
- les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.

On note T la variable aléatoire donnant le temps total d'attente avant les accès au activités sportives lors des deux jours, exprimé en minute. Ainsi on a $T = T_1 + T_2$.

1 Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice,

2 Montrer que la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T est égale à 356.

3 En déduire l'écart-type de T.

Exercice 2 : (10 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$ par

$$f(x)=\frac{e^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1 (a) Déterminer la limite de la fonction f en 1.

(b) En déduire une interprétation graphique.

2 Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3 (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, on a

$$f'(x)=\frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$

(b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.

4 On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, on a

$$f''(x)=\frac{\left(x^2-4x+5\right)e^x}{(x-1)^3}.$$

(a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.

(b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

(c) En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, on a :

$$e^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

5 (a) Justifier que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.