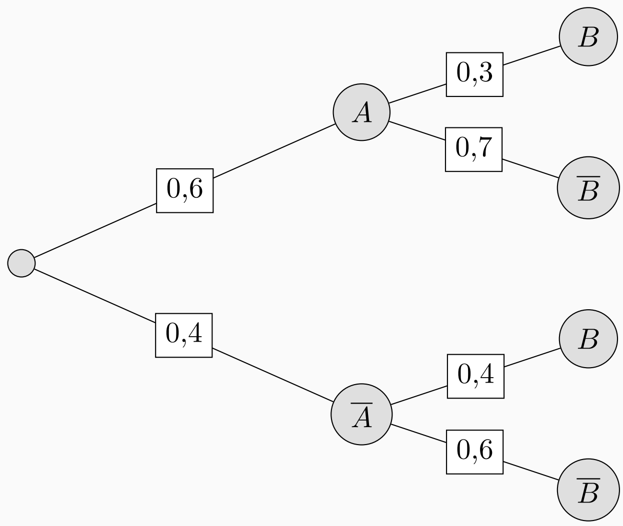
Devoir Surveillé n° 8

Corrigés

Exercice 1 : (10 points)

1 Ci-après l'arbre des probabilités représentant cette situation :



2 On sait que : $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$.
La probabilité qu'une personne ne chute pas lors des deux premières séances est alors égale à 0,24.

3 Les deux événements A et $\overline{A}$ froment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A\cap B) + P\left(\overline{A}\cap B\right) \\ &= P(A)\times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right)\times P_{\overline{A}}(B) \\ &= 0{,}6\times 0{,}3 + 0{,}4\times 0{,}4 \\ &= 0{,}18 + 0{,}16 \\ &= 0{,}34. \end{aligned}$$

4 Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned} P_{\overline{B}}(\overline{A}) &= \frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} \\ &= \frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{1-P(B)} \\ &= \frac{0{,}24}{1-0{,}34} \\ &= \frac{0{,}24}{0{,}66} \\ &= \frac{24}{66} \\ &= \frac{4}{11} \\ &\approx 0{,}364 \qquad \text{au millième près.} \end{aligned}$$

5 **a** L'expérience aléatoire consistant à choisir une personne, n'ayant chuté ni lors de la première séance ni lors de la seconde séance, est épreuve de Bernoulli.
On assimile le choix d'un échantillon de 100 personnes à un tirage avec remise.
Ce qui revient à répéter 100 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli dont la probabilité d'un succès est égale à 0,24.
La variable aléatoire X, donnant le nombre de succès, suit alors la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}24$.

b On sait que :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 20) &= 1 - P(X < 20) \\ &= 1 - P(X \leqslant 19) \\ &\approx 1 - 0{,}145. \quad \text{D'après la calculatrice.} \end{aligned}$$

En conséquence, $P(X \geqslant 20) \approx 0{,}855$ au millième près.

c $X \hookrightarrow$
B(100 ;0,24)*donc*E(X) = n $\times p = 100 \times 0{,}24 = 24$.
Ceci signifie qu'en moyenne 24 personnes sur 100 ne chuteront lors des deux premières séances.

Partie B

1 Par linéarité de l'espérance, on a :
$E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 40 + 60 = 100$.
En conclusion, il faut attendre en moyenne 100 minutes sur les deux jours.

2 Les variables aléatoires T_1 et T_2 étant indépendantes, ainsi :
$V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2)$.
De plus, $V(T_1) = \sigma(T_1)^2 = 10^2 = 100$ et $V(T_2) = \sigma(T_2)^2 = 16^2 = 256$.
En conséquence, $V(T) = 100 + 256 = 356$.

3 On sait que : $\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = \sqrt{356} = 2\sqrt{89} \approx 18{,}8$.

Exercice 2 : (10 points)

1 **a** La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc, $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} > 0$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x-1) = 0^-$.
Par quotient de limites, on obtient : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

b On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction$f$, admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2 On sait que : $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. De plus, par somme de limites, on a : $\lim\limits_{x\to -\infty} x - 1 = -\infty$.
En conséquence, par quotient de limites, on obtient : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$.
On en déduit alors que $\mathcal{C}$ admet également une asymptote horizontale, d'équation $y = 0$, au voisinage de $-\infty$.

3 **a** f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[$, comme quotient de fonctions bien définies et dérivables sur cet intervalle.
Posons, $u(x) = e^x$ et $v(x) = x - 1$. La fonction v est différente de 0 et ce pour tout $x < 1$.
De plus, $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$.
Dès lors,

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty\,;\,1[, \quad f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x \times (x-1) - \mathrm{e}^x \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x \times (x-1-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

b Pour tout $x \in]-\infty;1[$; $e^x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$. Ainsi, le signe de f' est celui de $(x-2)$. Or, pour tout $x < 1$; $x - 2 < 1 - 2 < -1 < 0$. On déduit alors de tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1
$x-2$		$-$	
e^x		$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0
signe de $f'(x)$		$-$	||
variations de f	0	$\searrow$	$-\infty$ ||

4 **a** Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, il suffit de déterminer le signe de $f''(x)$.
Pour tout x dans $]-\infty\ ;\ 1[$, on a $(x-1)<0$ et donc $(x-1)^3<0$, de plus $\mathrm{e}^x>0$.
En conséqeunce, le signe de $f''(x)$ est l'opposé du signe du trinôme, $x^2-4x+5 \quad (*)$.
Le discriminant du trinôme $(*)$ est égal à $\Delta=(-4)^2-4\times1\times5=-4$.
Δ étant <0, ce trinôme n'admet pas de racine, et son signe est celui du coefficient principal. Autrement dit, $x^2-4x+5>0$.
On déduit alors le tableau de convexité suivant :

x	$-\infty$		1
$(x-1)^3$		$-$	0
e^x		$+$	
x^2-4x+5		$+$	
signe de $f''(x)$		$-$	||
Convexité de f		concave	

b Pour déterminer l'équation de T, il nous faut connaître $f'(0)$ et $f(0)$:
— $f'(0)=\dfrac{(0-2)\mathrm{e}^0}{(0-1)^2}=\dfrac{-2}{1}=-2$;
— $f(0)=\dfrac{\mathrm{e}^0}{0-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$.
L'équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0, est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0)+f(0) \\ &= -2x-1. \end{aligned}$$

c On sait que la fonction f est concave sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, donc sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est située sous ses tangentes, et en particulier sous la tangente T, sur cet intervalle. Autrement dit, pour tout $x\in]-\infty\ ;\ 1[$, on a $f(x)\leqslant-2x-1$.

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}\leqslant-2x-1.$$

Par ailleurs, $x\in]-\infty\ ;\ 1[$, $x-1<0$, donc : $\mathrm{e}^x\geqslant(-2x-1)(x-1)$.

5 **a** — La fonction f est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 1[$ et donc continue sur cet intervalle.
— De plus, f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1[$.
— Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0>-2$ et $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty<-2$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou plus précisément le théorème de bijection), l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.

b En utilisant la calculatrice et la méthode de balayage, on obtient :
— $f(0{,}31)\approx-1{,}98>-2$;

— $f(0{,}32) \approx -2{,}03 < -2$.

Ainsi, $0{,}31 < \alpha < 0{,}32$ est un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.