Tle Spé | maths-mde.fr

Devoir Surveillé $n°$ 6

.../20 - 2 h

Lycée Evariste Galois

Exercice 1 : (9 points)

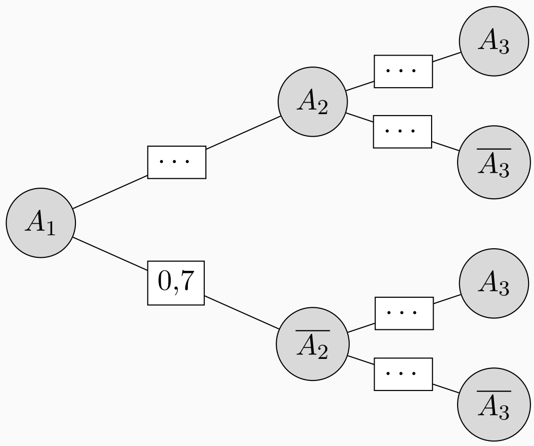
Soit n un entier naturel non nul. Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n. Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

— Si l'évènement A_n est réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3.

— Si l'évènement A_n n'est pas réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7.

Partie A : On suppose que $p_1 = 1$.

1 Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :

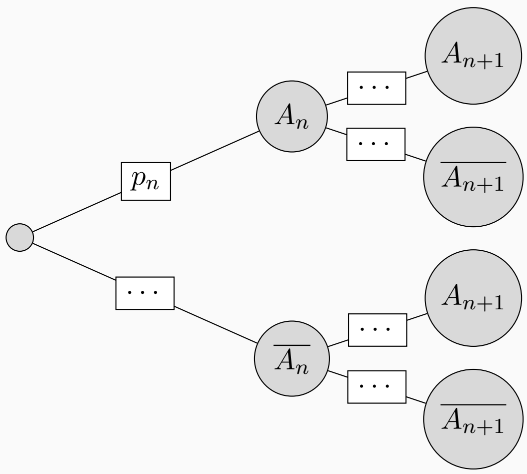


2 Montrer que $p_3 = 0{,}58$.

3 Calculer la probabilité conditionnelle $P_{A_3}(A_2)$, arrondir le résultat à 10^{-2} près.

Partie B : Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geqslant 1$.

1 Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



2 Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = -0{,}4p_n + 0{,}7$.

On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0{,}5$.

3 Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

4 En déduire l'expression de u_n, puis de p_n en fonction de n.

5 Déterminer la limite de la suite (p_n).

Partie C : Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de succès réalisés, liés à l'arbre de probabilité complété dans la partie A. Un succès correspond au cas où l'événement A_n est réalisé.

1 Donner la loi de la variable aléatoire X.

2 Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2 : (8 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1 Calculer le terme u_1.

2 On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par : $a_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a Calculer a_0 et a_1.

b Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $a_n \geqslant 3n - 1$.

d En déduire la limite de la suite (a_n).

3 On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

a Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.

b En déduire la limite de la suite (u_n).

4 Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

5 On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```python
def algo(p):
    u=2
    n=0
while u-1>p:
        u=(2*u+1)/(u+2)
        n=n+1
return (n,u)
```

a Interpréter les valeurs n et u renvoyées par l'appel de la fonction algo(p) dans le contexte de l'exercice.

b Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0{,}001$.

Exercice 3 : (3 points)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les trois questions sont indépendantes. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k})$. Justifier les réponses.

1 On considère les points A$(1\,;0\,;3)$ et B$(4\,;1\,;0)$. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a. $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 1 \\ z = -3+3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

b. $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

c. $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 3-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

d. $\begin{cases} x = 4+t \\ y = 1 \\ z = 3-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

2 On considère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

a. M$(7\,;6\,;6)$ **b.** N$(3\,;6\,;4)$ **c.** P$(4\,;\,6\,;\,-2)$ **d.** R$(-3\,;\,-9\,;\,7)$.

3 On considère la droite (d') de représentation paramétrique

$\begin{cases} x = -2+3k \\ y = -1-2k \\ z = 1+k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Les droites (d) et (d') sont :

a. sécantes **b.** non coplanaires **c.** parallèles **d.** confondues.