Exercice 1 : (9 points)

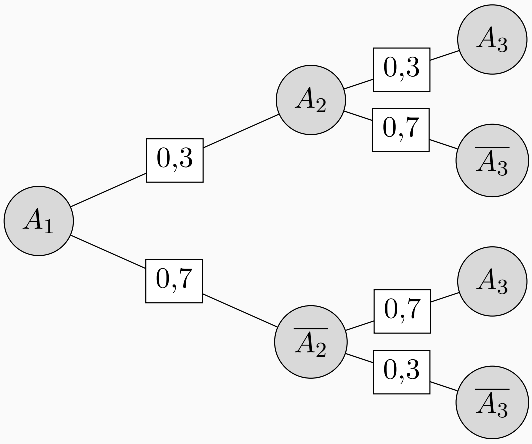
Soit n un entier naturel non nul. Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n.
Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

- Si l'évènement A_n est réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3.
- Si l'évènement A_n n'est pas réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7.

On suppose que $p_1 = 1$.

Partie A :

1 Ci-après l'arbre des probabilités complété :



2 A_2 et $\overline{A_2}$ forment une partition de l'univers car $\Omega = A_2 \cup \overline{A_2}$. Ainsi, selon la formule des probabilités totales, on a :

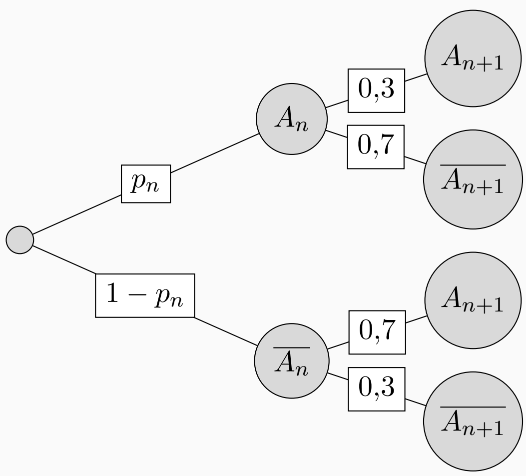
$$\begin{aligned}P(A_3) &= P(A_2 \cap A_3) + P\left(\overline{A_2} \cap A_3\right) \\ &= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P\left(\overline{A_2}\right) \times P_{\overline{A_2}}(A_3) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}7 \\ &= 0{,}58.\end{aligned}$$

3 Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned}P_{A_3}(A_2) &= \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} \\ &= \frac{0{,}3 \times 0{,}3}{0{,}58} \\ &\approx 0{,}16.\end{aligned}$$

Partie B : Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geqslant 1$.

1 Ci-après l'arbre des probabilités complété :



2 A_n et $\overline{A_n}$ forment une partition de l'univers. Ainsi, selon la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P\left(A_{n+1}\right) \\
&= P\left(A_n \cap A_{n+1}\right) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) \\
&= P\left(A_n\right) \times P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(\overline{A_n}\right) \times P_{\overline{A_n}}\left(A_{n+1}\right) \\
&= p_n \times 0{,}3 + (1 - p_n) \times 0{,}7 \\
&= 0{,}3p_n + 0{,}7 - 0{,}7p_n \\
&= -0{,}4p_n + 0{,}7.
\end{aligned}$$

On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0{,}5$. Soit, $p_n = u_n + 0{,}5$.

3 Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - 0{,}5 = -0{,}4p_n + 0{,}7 - 0{,}5 \\
&= -0{,}4\left(u_n + 0{,}5\right) + 0{,}2 \\
&= -0{,}4u_n - 0{,}2 + 0{,}2 \\
&= -0{,}4u_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -0{,}4$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

4 Pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0{,}5 \times (-0{,}4)^{n-1}$.
Ainsi, $p_n = u_n + 0{,}5 = 0{,}5 \times (-0{,}4)^{n-1} + 0{,}5$.

5 On a : $-1 < -0{,}4 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0{,}4)^{n-1} = 0$.
Ainsi, par produit et sommes de limites, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}5$.

Partie C :

1 La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$P(\overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$	$1 - (0{,}21 + 0{,}09) = 0{,}7$	$P(A_2 \cap A_3) = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09.$

2 L'espérance de X :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=0}^{2} x_i P(X = x_i) \\
&= 1 \times 0{,}21 + 2 \times 0{,}7 + 3 \times 0{,}09 \\
&= 1{,}88
\end{aligned}$$

Variance de X :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=0}^{2} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \\
&= (1 - 0{,}88)^2 \times 0{,}21 + (2 - 0{,}88)^2 \times 0{,}7 + (3 - 0{,}88)^2 \times 0{,}09 \\
&= 0{,}2856.
\end{aligned}$$

Exercice 2 : (8 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

1 On a : $u_1 = \dfrac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \dfrac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25.$

2 **a** On a : $a_0 = \dfrac{u_0}{u_0 - 1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$ et $a_1 = \dfrac{u_1}{u_1 - 1} = \dfrac{1{,}25}{1{,}25 - 1} = \dfrac{1{,}25}{0{,}25} = 5$.

b **Première méthode :** Pour tout entier naturel n, on a d'une part,

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2} - 1} = \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2} - \dfrac{u_n+2}{u_n+2}}$$
$$= \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1-u_n-2}{u_n+2}} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \times \frac{u_n+2}{u_n-1}$$
$$= \frac{2u_n+1}{u_n-1}$$

et, d'autre part : $3a_n - 1 = 3 \times \dfrac{u_n}{u_n-1} - 1 = \dfrac{3u_n}{u_n-1} - \dfrac{u_n-1}{u_n-1} = \dfrac{3u_n - (u_n-1)}{u_n-1}$

$$= \frac{2u_n+1}{u_n-1}.$$

On constate bel et bien que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

Deuxième méthode : Pour tout entier naturel n, on a,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} \\
&= \frac{u_{n+1}-1+1}{u_{n+1}-1} = 1 + \frac{1}{u_{n+1}-1} \\
&= 1 + \frac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2} - 1} \\
&= 1 + \frac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2} - \dfrac{u_n+2}{u_n+2}} \\
&= 1 + \frac{1}{\dfrac{u_n-1}{u_n+2}} \\
&= 1 + \frac{u_n+2}{u_n-1} \\
&= 2 + \frac{u_n+2}{u_n-1} - 1 \\
&= \frac{2(u_n-1)+u_n+2}{u_n-1} - 1 \\
&= \frac{2u_n-2+u_n+2}{u_n-1} - 1 \\
&= \frac{3u_n}{u_n-1} - 1 \\
&= 3\frac{u_n}{u_n-1} - 1 \\
&= 3a_n - 1.
\end{aligned}$$

c Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: $a_n \geqslant 3n - 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $a_1 = 5$ et $5 \geqslant 3 \times 1 - 1 = 2$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée, autrement dit $a_{n+1} \geqslant 3(n+1) - 1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
&a_n \geqslant 3n-1 \\
&3a_n \geqslant 3(3n-1) \quad \text{car, } 3>0 \\
&3a_n - 1 \geqslant 9n-3-1 \\
&a_{n+1} \geqslant 9n-4 \quad \text{car, } 3a_n - 1 = a_{n+1} \\
&a_{n+1} \geqslant 3n+6n+3-7 \\
&a_{n+1} \geqslant 3(n+1)+6n-7 \\
&a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1+6n-6 \\
&a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1+6(n-1).
\end{aligned}$$

Or, $6(n-1) \geqslant 0$, donc $a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1$. Ainsi, l'hérédité est vérifiée.

Conclusion : Selon le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $a_n \geqslant 3n-1$.

d) $3>0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-1 = +\infty$.

Ainsi, selon le théorème de comparaison, la suite (a_n) diverge vers $+\infty$.

3 a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
&a_n = \frac{u_n}{u_n-1} \\
&a_n \times (u_n - 1) = u_n \quad \text{car } u_n - 1 \neq 0 \\
&a_n \times u_n - a_n - u_n = 0 \\
&(a_n - 1)\times u_n - a_n = 0 \\
&(a_n - 1)\times u_n = a_n \\
&u_n = \frac{a_n}{a_n-1}, \ \text{ où } \ a_n \neq 1.
\end{aligned}$$

En effet, $a_0 = 2$ et pour n entier naturel non nul, on a $a_n \geqslant 3n-1 > 1$.

b) Pour tout n naturel, on a : $u_n = \dfrac{a_n}{a_n-1} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a_n}}$.

Or, (a_n) diverge vers $+\infty$, donc par limite du quotient et limite de la somme, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{a_n} = 1$.

Enfin, par quotient, on déduit le résultat : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a_n}} = 1$.

Autrement dit, la suite (u_n) converge vers 1.

4 Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}-1} - \frac{a_n}{a_n-1} \\
&= \frac{3a_n-1}{3a_n-2} - \frac{a_n}{a_n-1} \\
&= \frac{(3a_n-1)(a_n-1)}{(3a_n-2)(a_n-1)} - \frac{a_n(3a_n-2)}{(3a_n-2)(a_n-1)} \\
&= \frac{3a_n^2 - 3a_n - a_n + 1 - 3a_n^2 + 2a_n}{(3a_n-2)(a_n-1)} \\
&= \frac{-2a_n+1}{(3a_n-2)(a_n-1)}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant 3n-1$, donc pour tout $n \geqslant 1$,
$-2a_n+1 \leqslant -6n+3 \leqslant -6\times1+3 \leqslant 0$; $3a_n-2 \geqslant 9n-5 \geqslant 9\times1-5 > 0$ et $a_n-1 \geqslant 3n-2 \geqslant 3\times1-2 > 0$.
En conséquence, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante.

5 **a** Cette fonction python initialise la variable u à 2 et la variable n à 0.

La boucle `while` s'exécute tant que l'écart entre la variable u et la limite 1 est strictement supérieur à la valeur p.

Les valeurs n et u renvoyées par la fonction `algo(p)` correspondent donc respectivement à l'indice et à la valeur du premier terme de la suite pour lequel l'écart entre le terme et la limite de la suite est inférieur ou égal à la valeur p choisie.

```python
def algo(p):
    u=2
    n=0
while u-1>p:
        u=(2*u+1)/(u+2)
        n=n+1
return (n,u)
```

b En utilisant la calculatrice, on constate que la valeur de n pour $p = 0{,}001$ est 6.

On peut également programmer la fonction sous python ou la calculatrice. Dans ce cas là, `algo(0.001)`, renvoie `(6, 1.000914913083257)`.

Exercice 3 : (3 points)

1 On considère les points A(1 ; 0 ; 3) et B(4 ; 1 ; 0).

On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$.

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathrm{AB})$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, autrement dit,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 3t\\ y-0 &=& 1t\\ z-3 &=& -3t.\end{array}\right.$$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est alors donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1+3t\\ y &=& t\\ z &=& 3-3t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$$

Il s'agit donc de la réponse **c.**

2 On considère la droite (d) de représentation paramétrique

$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 3+4t\\ y &=& 6t\\ z &=& 4-2t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

Par substitution, on constate que les coordonnées du point D vérifient le système ci-dessus. En effet,

$\left\{\begin{array}{rcr} -3 &=& 3+4t\\ -9 &=& 6t\\ 7 &=& 4-2t\end{array}\right.$ ce qui implique que $t = -\dfrac{3}{2}$. Il s'agit donc de la réponse **d.**

3 ⇝ Les deux droites (d) et (d') ont respectivement pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{u} = t\overrightarrow{v}$, autrement dit, $\begin{cases}4=3t\\6=-2t\\-2=t\end{cases}$. Ceci implique que $\begin{cases}\frac{4}{3}=t\\-3=t\\-2=t\end{cases}$, c'est absurde.

En conséquence, (d) et (d') ne sont pas parallèles.

⇝ Les deux droites sont sécantes si il existe deux réels t et k tels que :

$$\begin{cases} 3+4t &= -2+3k \\ 6t &= -1-2k \\ 4-2t &= 1+k \end{cases} \text{ autrement dit } \begin{cases} 4t = 3k-5 & L_1 \\ 6t = -2k-1 & L_2 \\ -2t = k-3 & L_3 \end{cases}.$$

La combinaison linéaire $L_1 - L_2$ implique $-2t = 5k - 4$.

Par substitution dans L_3, on obtient : $5k - 4 = k - 3$, soit $k = \dfrac{1}{4}$ et donc $t = \dfrac{11}{8}$.

Et par substitution dans L_1, on obtient : $4t = 3k - 5 = \dfrac{3}{4} - 5 = -\dfrac{17}{4}$, d'où $t = \dfrac{17}{8}$, c'est impossible.

Ce système n'admet pas de solutions donc les deux droites ne sont pas sécantes.

$\rightsquigarrow$ Les deux droites ne sont pas confondues non plus. Il s'agit donc de la réponse **b.**