Devoir Surveillé n° 5

Corrigé

Question 1 : (1 point)

Dans un repère orthonormé, on considère les deux points $A\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ et $B\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};1\right)$.

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}\\
&= \sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2+(1-0)^2}\\
&= \sqrt{1^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+1^2}\\
&= \sqrt{2+\frac{9}{4}}\\
&= \sqrt{\frac{17}{4}}\\
&= \frac{\sqrt{17}}{2}.
\end{aligned}$$

Question 2 : (1 point)

On considère les deux points $E(-5;1;2)$ et $F(1;-1;10)$. Les coordonnées du point I, le milieu de $[EF]$, sont :

$$I\left(\frac{x_E+x_F}{2};\frac{y_E+y_F}{2};\frac{z_E+z_F}{2}\right)$$
$$I\left(\frac{-5+1}{2};\frac{1+(-1)}{2};\frac{2+10}{2}\right)$$
$$I\left(-2;0;6\right).$$

Question 3 : (1 point)

On considère les deux points $C(2;-1;2)$ et $D(3;0;1)$.

<u>1ère méthode :</u> fortement recommandée. À utiliser !

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (DC).

$M(x;y;z)\in(CD)$ si et seulement si il existe un réel $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{CM}=t\overrightarrow{CD}$, autrement dit, $\begin{pmatrix}x-2\\y-(-1)\\z-2\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (CD) est alors donnée par :

$$\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=2-t\end{cases}\qquad \text{où}\quad t\in\mathbb{R}.$$

<u>2ème méthode :</u>

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (DC).

Soit $M(x;y;z) \in (CD)$. $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix}$ est également un vecteur vecteur directeur de (DC).
Les deux vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CM}$ ont la même direction, ils sont alors colinéaires.
Il existe alors un réel t tel que $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CD}$.
Ainsi, une représentation paramétrique de la droite (CD) est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 2-t \end{cases} \qquad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Question 4 : (1 point)

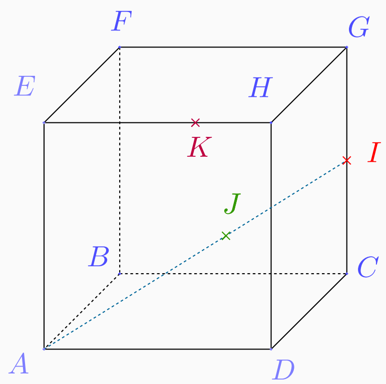
On donne les points $A(1;0;2)$, $B(2;1;\frac{3}{2})$, $C(-1;3;2)$ et $D(-1;-7;4)$.
On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{CD}$.
Résolvons alors le système d'équations :

$$\begin{cases} 1 = -2a - 2b & L_1 \\ 1 = 3a - 7b & L_2 \\ -\frac{1}{2} = 0a + 2b & L_3 \end{cases}.$$

L'équation de la ligne L_3 implique que $b = -\dfrac{1}{4}$.
Par substitution dans L_2, on obtient : $1 = 3a - 7 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)$, soit $a = -\dfrac{1}{4}$.
Et, par substitution dans L_1, on obtient : $1 = -2a - 2 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)$, soit $a = -\dfrac{1}{4}$. Le résultat est cohérent.
En conséquence, les points A, B, C et D sont bel et bien coplanaires.

Question 6 : (1 point)

On considère le cube ABCDEFGH ci-après.



On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$. Ainsi, $A(0;0;0)$; $E(0;0;1)$ et $H(1;0;1)$.
I est le milieu de [GC] donc, $I\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$.
Par ailleurs, $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AI}$, autrement dit, $\begin{pmatrix} x_J - 0 \\ y_J - 0 \\ z_J - 0 \end{pmatrix} = \dfrac{3}{5}\begin{pmatrix} x_I - 0 \\ y_I - 0 \\ z_I - 0 \end{pmatrix}$.

En conséquence, le point J a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{3}{5}; \dfrac{3}{10}\right)$.

Le point K est défini par $\overrightarrow{EK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EH}$. Ainsi, $\begin{pmatrix} x_K - 0 \\ y_K - 0 \\ z_K - 1 \end{pmatrix} = \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-0 \\ 1-1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent le point K a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}; 0; 1\right)$.

Question 7 : (1 point)

Déterminons la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 7}{-x^2 + 2x - 10}$.
Le discriminant du trinôme $-x^2 + 2x - 10$ est égal à $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = 4 - 40 = -36$.
Δ étant < 0, ce trinôme n'admet pas de racines. Donc, $x \longrightarrow \dfrac{2x^2 - 5x + 7}{-x^2 + 2x - 10}$ est bien définie dans $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -5x = -\infty$, nous avons donc une forme indéterminée au numérateur.
Idem, pour le dénominateur.
Dès lors, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 - 5x + 7}{-x^2 + 2x - 10} &= \frac{x^2\left(2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(-1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{10}{x^2}\right)} \\
&= \frac{2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{x^2}}{-1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{10}{x^2}}.
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc par somme de limites,
$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = 2$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{10}{x^2}\right) = -1$.
En conséquence, par quotient de limites, on obtient : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 7}{-x^2 + 2x - 10} = -2$.

Question 8 : (1 point)

Déterminons la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1}\right)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$, la fonction $x \longrightarrow x - \sqrt{x^2 + 1}$ est alors bien définie dans $\mathbb{R}$.
On sait que, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc par somme de limites, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$.
Or, $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc par composition $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ et par produit $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -\sqrt{x^2 + 1} = -\infty$.
Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$. Nous avons alors une forme indéterminée.
Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
x - \sqrt{x^2 + 1} &= \left(x - \sqrt{x^2 + 1}\right) \times \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\
&= \frac{x^2 - \sqrt{x^2 + 1}^2}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\
&= \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}.
\end{aligned}$$

De plus, par produit et somme de limites, on obtient : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1}) = +\infty$.

En conséquence, par quotient (ou inverse),

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0.$$

Question 9 : (1 point)

Déterminons la limite suivante : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\dfrac{3x-5}{x^2+2x-8}$.

Le discriminant du trinôme x^2+2x-8 est égal à $\Delta=b^2-4ab=2^2-4\times1\times(-8)=36$.
Δ étant >0, ce trinôme admet deux racines distinctes $x_1=2$ et x_2. Or, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{8}{2}$, donc $x_2=-4$.
On déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
x^2+2x-8		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction $x\longrightarrow\dfrac{3x-5}{x^2+2x-8}$ est ainsi bien définie sur $\mathbb{R}\smallsetminus\{-4;2\}$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}3x-5=1\ \ (>0)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}x^2+2x-8=0^+$ (x^2+2x-8 tend vers 0 par valeurs positives), donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\dfrac{3x-5}{x^2+2x-8}=+\infty$.

Question 10 : (1 point)

Déterminons la limite suivante : $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$.

La fonction $x\longmapsto\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ est bien définie lorsque $x^2-9\geqslant0$ et $x\neq3$, autrement dit, pour tout $x\in]-\infty;-3]\cup]3;+\infty[$.
On déduit alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	-6	$-$	0	$+$	
$\sqrt{x^2-9}$		$+$	0		0	$+$	
$\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$		$-$	0			$+$	

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x^2-9}=0$ et $\lim\limits_{x\to3}(x-3)=0$, on a donc une forme indéterminée.

Dès lors, pour tout $x \in]3;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} &= \frac{\sqrt{(x-3)(x+3)}}{x-3} \\
&= \frac{\sqrt{(x-3)(x+3)}}{\sqrt{x-3}^2} \\
&= \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \\
&= \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}.
\end{aligned}$$

De plus, $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+3} = \sqrt{6}$ et $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x-3} = 0^+$ (tend vers 0 par valeurs positives), donc :
$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} = +\infty.$