Tle Spé | **Devoir Surveillé n° 4** | Lycée
maths-mde.fr | **Corrigé** | Evariste Galois

Question 1 : (1 point)

X et Y sont deux variables aléatoires telles que $E(X) = -1$ et $E(Y) = 2$.
Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(2X+5Y) &= 2E(X)+5E(Y) \\ &= 2\times(-1)+5\times 2 \\ &= -2+10 \\ &= 8. \end{aligned}$$

Question 2 : (1 point)

X et Y étant deux variables aléatoires indépendantes, donc :

$$\begin{aligned} V(3X-Y) &= 3^2\times V(X)+(-1)^2V(Y) \\ &= 9\times 1+1\times 2 \\ &= 11. \end{aligned}$$

Question 3 : (1 point)

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}5$, donc

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ &= 10\times 0{,}5 \\ &= 5. \end{aligned}$$

De plus, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}42$, ainsi,

$$\begin{aligned} E(Y) &= np \\ &= 10\times 0{,}42 \\ &= 4{,}2. \end{aligned}$$

Dès lors, par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned} E(X-2Y) &= E(X)-2E(Y) \\ &= 5-2\times 4{,}2 \\ &= -3{,}4. \end{aligned}$$

Question 4 : (1 point)

X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}6$ donc,

$$\begin{aligned} V(X) &= p(1-p) \\ &= 0{,}6\times(1-0{,}6) \\ &= 0{,}24. \end{aligned}$$

De plus, Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $p' = 0{,}33$ donc,

$$\begin{aligned} V(Y) &= p'(1-p') \\ &= 0{,}33\times(1-0{,}33) \\ &= 0{,}2211. \end{aligned}$$

Par ailleurs, les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes, ainsi,

$$\begin{array}{rcl} V(5X-Y) & = & 5^2 \times V(X) + (-1)^2 V(Y) \\ & = & 25 \times 0{,}24 + 1 \times 0{,}2211 \\ & = & 6{,}2211. \end{array}$$

En conséquence, $\sigma(5X-Y) = \sqrt{V(5X-Y)} = \sqrt{6{,}2211} \approx 2{,}49$.

Question 5 : (1 point)

Pour tout nombre entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant 20$, la variable aléatoire X_i suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}13$, donc $E(X_i) = 10 \times 0{,}13 = 1{,}3$.

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} E(S) & = & E(X_1 + \cdots + X_{20}) \\ & = & E(X_1) + \cdots + E(X_{20}) \\ & = & 20 \times 1{,}3 \\ & = & 26. \end{array}$$

Par ailleurs, les variables aléatoires X_i sont supposées indépendantes, donc :

$$\begin{array}{rcl} V(S) & = & V(X_1 + \cdots + X_{20}) \\ & = & V(X_1) + \cdots + V(X_{20}) \\ & = & 20 \times 10 \times 0{,}13 \times (1 - 0{,}13) \\ & = & 22{,}62. \end{array}$$

Question 6 : (1 point)

On lance 10 fois de suite de façon indépendante une pièce de monnaie et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de « face » obtenu.
L'expérience consistant à lancer une pièce de monnaie est une épreuve de Bernoulli. La probabilité d'un succès, soit obtenir face est égale à 0,5.
On répète 5 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli.
La variable aléatoire X donnant le nombre de faces obtenues suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}5$.

Question 7 : (1 point)

On considère la variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{B}(40\,;\,0{,}1)$. On sait que :

$$\begin{array}{rcl} p(X > 30) & = & 1 - p\left(\overline{X > 30}\right) \\ & = & 1 - p\left(X \leqslant 30\right) \\ & = & 1 - 1 \;\text{ en utilisant la calculatrice} \\ & = & 0. \end{array}$$

Question 8 : (1 point)

On considère la variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{B}(40\,;\,0{,}1)$. On sait que :

$$\begin{array}{rcl} p(10 \leqslant X < 20) & = & p(10 \leqslant X \leqslant 19) \\ & = & p\,(X \leqslant 19) - p\,(X \leqslant 9) \\ & \approx & 1 - 0{,}9949369 \ \text{ en utilisant la calculatrice} \\ & \approx & 0{,}005. \end{array}$$

Question 9 : (1 point)

On considère que le nombre d'élèves dans la classe de Maria l'année prochaine est donné par une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{B}(35\,;\,0{,}9)$.
En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} P(X \geqslant 26) & = & 1 - P\left(\overline{X \geqslant 26}\right) \\ & = & 1 - P\,(X < 26) \\ & = & 1 - P\,(X \leqslant 25) \\ & \approx & 0{,}998. \end{array}$$

Et comme, $P(X \geqslant 26) > 0{,}99$, on peut déduite que Maria est sûre au seuil de 99 % d'avoir au moins 26 élèves dans sa classe l'année prochaine.

Question 10 : (1 point)

Le diagramme en barres associé à la loi $\mathcal{B}(\mathrm{n}\,;\,0{,}8)$ est centré sur son espérance, soit approximativement 16.

Or, $E(X) = n \times 0{,}8$, donc $n = \dfrac{16}{0{,}8} = 20$.