Tle Spé
maths-mde.fr

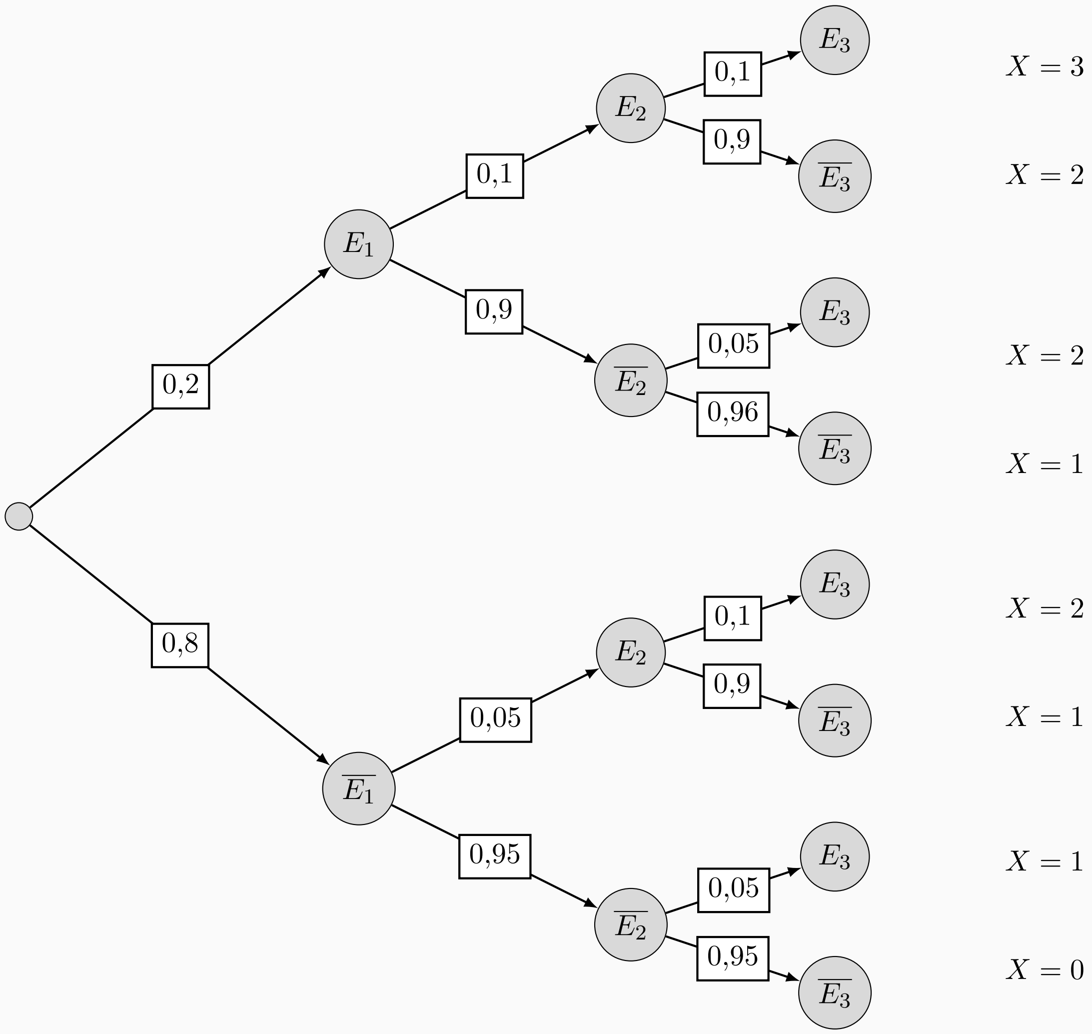
Devoir Surveillé n° 3

Corrigé - 1 heure

Lycée
Evariste Galois

Exercice 1 : (9 points)

Cette situation peut être représentée par l'arbre de probabilité ci-après.



1 Les valeurs possibles pour la variable aléatoire X sont : 0 ; 1 ; 2 et 3.

2 Selon le susdit arbre de probabilité, on a :

$$\begin{aligned} p(X=2) &= p(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap \overline{\mathrm{E}_3}) + p(\mathrm{E}_1 \cap \overline{\mathrm{E}_2} \cap \mathrm{E}_3) + p(\overline{\mathrm{E}_1} \cap \mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_3) \\ &= (0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}9) + (0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}05) + (0{,}8 \times 0{,}05 \times 0{,}1) \\ &= 0{,}031. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} p(X=3) &= p(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_3) = 0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \\ &= 0{,}002. \end{aligned}$$

3 Calculons $p(X=0)$:

$$\begin{aligned} p(X=0) &= p(\overline{\mathrm{E}_1} \cap \overline{\mathrm{E}_2} \cap \overline{\mathrm{E}_3}) = 0{,}8 \times 0{,}95 \times 0{,}95 \\ &= 0{,}722. \end{aligned}$$

La propriété de la probabilité de l'événement contraire permet de déduire $P(X=1)$:

$$\begin{aligned} p(X=1) &= 1 - [p(X=0) + p(X=2) + p(X=3)] \\ &= 1 - (0{,}722 + 0{,}031 + 0{,}002) \\ &= 0{,}245. \end{aligned}$$

La loi de probabilité de X est donnée le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,722	0,245	0,031	0,002

4 L'espérance de X :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^{3} x_i p(X = x_i) \\ &= x_0 \times p(X = x_0) + x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + x_3 \times p(X = x_3) \\ &= (0 \times 0{,}722) + (1 \times 0{,}245) + (2 \times 0{,}031) + (3 \times 0{,}002) \\ &= 0{,}313. \end{aligned}$$

5 **a** Pour tout n non nul, par définition, on a :

$$\begin{aligned} p\left(E_n \cap E_{n+1}\right) &= p_{E_n}\left(E_{n+1}\right) \times p\left(E_n\right) \\ &= 0{,}1 \times p\left(E_n\right) \\ &= 0{,}1 p_n. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} p\left(\overline{E_n} \cap E_{n+1}\right) &= p_{\overline{E_n}}\left(E_{n+1}\right) \times p\left(\overline{E_n}\right) \\ &= 0{,}05 \times (1 - p(E_n)) \\ &= 0{,}05(1 - p_n). \end{aligned}$$

b Les deux événements forment l'univers E_n et $\overline{E_n}$. Ainsi, $E_{n+1} = (E_n \cap E_{n+1}) \cup \left(\overline{E_n} \cap E_{n+1}\right)$.
Dès lors, en utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p\left(E_{n+1}\right) \\ &= p\left(E_n \cap E_{n+1}\right) + p\left(\overline{E_n} \cap E_{n+1}\right) \\ &= 0{,}1 p_n + 0{,}05\left(1 - p_n\right) \\ &= 0{,}05 p_n + 0{,}05. \end{aligned}$$

6 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.

a Pour tout $n > 0$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{19} \\ &= 0{,}05 p_n + 0{,}05 - \frac{1}{19} \\ &= \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{20} - \frac{1}{19} \\ &= \frac{1}{20} p_n - \frac{1}{380} \\ &= \frac{1}{20}\left[p_n - \frac{1}{19}\right] \\ &= \frac{1}{20} u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite **géométrique**, de raison $q = \dfrac{1}{20}$ et de premier terme
$u_1 = p_1 - \dfrac{1}{19} = 0{,}2 - \dfrac{1}{19} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{19} = \dfrac{14}{95}$.

b Pour tout $n > 0$, on a : $u_n = u_1 q^{n-1}$, soit $u_n = \dfrac{14}{95} \times \left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1}$.

Ainsi, $p_n = u_n + \dfrac{1}{19} = \dfrac{1}{19} + \dfrac{14}{95} \times \left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1}$.

c $-1 < \dfrac{1}{20} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{20}\right)^{n-1} = 0$.

Ainsi, par produit et somme de limites : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{19}$.

Exercice 2 : (6 points)

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les points suivants :

$$A(2;-1;0); B(-1;1;1) \text{ et } C(3;-2;-1).$$

$\boxed{1}$ On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-2\\1-(-1)\\1-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Une équation paramétrique de la droite (AB) est alors donnée par :

$$\begin{cases} x = 2-3t \\ y = -1+2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{2}$ On a : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-2\\-2-(-1)\\-1-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Or, $\dfrac{-3}{1} \neq \dfrac{2}{-1}(\neq \dfrac{1}{-1})$. Donc, les deux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont non colinéaires.

Par conséquent, A, B et C ne sont pas alignés.

$\boxed{3}$ Soit E$(0;-1;1)$. Supposons que le point E appartient au plan (ABC), il existe alors a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

Or, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0-2\\-1-(-1)\\1-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$. Donc, $\begin{cases} -3a+b=-2 & L_1 \\ 2a-b=0 & L_2 \\ a-b=1 & L_3 \end{cases}$.

La combinaison linéaire $L_1 + L_2$ implique que : $-a=-2$, soit $a=2$.

Et la combinaison linéaire $L_2 - L_3$ entraine que : $a=-1$. Absurde.

En conséquence, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas coplanaires. Autrement dit, le point E n'appartient pas au plan (ABC).

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AC).

On constate alors que, $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{AC}$, autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. En conséquence, $(d)//(AC)$.

$\boxed{5}$ — *Les droites sont-elles parallèles ?*

Pour le savoir, il faut regarder si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Le vecteur directeur de $(\mathcal{D}_1)$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-5\\1\\-3\end{pmatrix}$ et celui de $(\mathcal{D}_2)$ est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

$$\frac{-5}{1} \neq \frac{1}{-2}$$

donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont donc pas parallèles.

— Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1) : \quad \begin{cases} x = 2-5t \\ y = -1+t \\ z = 4-3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(\mathcal{D}_2) : \quad \begin{cases} x = 5+t' \\ y = -4-2t' \\ z = 1+t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Les droites sont-elles sécantes ?

Pour le savoir, nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases} 2-5t = 5+t' \\ -1+t = -4-2t' \\ 4-3t = 1+t' \end{cases}$$

Si on ne considère que les deux premières équations, on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2-5t = 5+t' \\ -1+t = -4-2t' \end{cases} &\iff \begin{cases} 5t+t' = -3 \\ t+2t' = -3 \end{cases} \\ &\iff t = -\frac{1}{3}, \quad t' = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Par substitution, la troisième équation donne alors :

$$4-3t = 1+t' \iff 4+1 = 1-\frac{4}{3} \iff 5 = -\frac{1}{3}.$$

Cette dernière égalité étant fausse, le système n'admet aucune solution et donc les droites ne sont pas sécantes.

Les deux droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ ne sont pas sécantes et elles ne sont pas parallèles, elles sont donc non coplanaires.