Tle Spé
maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 2

...../20 - 1 heure

Lycée
Evariste Galois

Exercice 1 : (7 points)

Les quatre questions sont indépendantes.

1 Soit la suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n \leqslant u_n \leqslant n+3$. Déterminer en justifiant :

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$;

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

2 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n-2}{2^n+3}$.

3 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f.

x	0	2
f	1	2

On définit alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et par l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

4 Démontrer que pour tout entier naturel non nul :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2.$$

Exercice 2 : (6 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

1 (a) Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 sous forme de fractions irréductibles.

(b) Que peut-on conjecturer pour la valeur de u_n en fonction de n.

(c) Recopier sur votre copie puis compléter le programme Python ci-dessous pour qu'il renvoie la valeur de u_n, la valeur de n étant donnée.

```
def u(n) :
    u = . . .
    for i in range ( 1 , . . . ):
        u = . . .
return u
```

2 On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme.

(b) En déduire la valeur de v_n puis de u_n en fonction de n.

(c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 3 : (7 points)

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage un protocole de traitement d'une maladie.
Ce protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a

diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1 **a** Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

b Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

2 On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

a Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b Déterminer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

c Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
Déterminer, en expliquant votre démarche, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

d On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Donner l'expression de S_n en fonction de n.

e Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.