Tle Spé — maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 2

Corrigé

Lycée Evariste Galois

Exercice 1 : (6 points)

1 Soit la suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n \leqslant u_n \leqslant n+3$.

a On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
Alors d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+3$.

Dès lors, $\dfrac{n}{n} \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+3}{n}$, car $n > 1$.

Autrement dit, $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{3}{n}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ et par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{3}{n} = 1$. Donc, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

2 $3 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ et par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n - 2 = +\infty$.
$2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n + 3 = +\infty$.
On a donc une forme indéterminée. En factorisant, on obtient :

$$\frac{3^n-2}{2^n+3} = \frac{3^n\left(1-\dfrac{2}{3^n}\right)}{2^n\left(1+\dfrac{3}{2^n}\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1-\dfrac{2}{3^n}}{1+\dfrac{3}{2^n}}.$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$, ainsi, par produit et somme, on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{3}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{3^n} = 1 \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\dfrac{2}{3^n}}{1+\dfrac{3}{2^n}} = 1.$$

De plus $\dfrac{3}{2} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$. Enfin par produit, on conclut que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n-2}{2^n+3} = +\infty.$$

3 Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Initialisation : Pour $n = 0$, $u_n = 0$ et $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
Par hypothèse de récurrence, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Or, la fonction f est croissante, donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2)$.
En utilisant le tableau de variation, on déduit que, $1 \leqslant f(u_n) \leqslant 2$. Autrement dit, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
L'hérédité est vérifiée.
Conclusion : Pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$.
Initialisation : Pour $n = 1$, $\begin{cases} 1^3 = 1 \\ 1^2 = 2 \end{cases}$ et $1^3 = 1^2$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée. Autrement dit, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = (1+2+\cdots+n+1)^2$.

Par hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 &= (1+2+\cdots+n)^2+(n+1)^3\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(1+n)^3 \quad \text{car,}\ \ 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+(n+1)\right)\\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)\\
&= (n+1)^2\left(\frac{(n+2)^2}{4}\right).
\end{aligned}$$

L'hérédité est donc vérifiée, car $\dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=(1+2+\cdots+(n+1))^2$.

Conclusion : Pour tout $n \geqslant 1$, $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

Exercice 2 : (7 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}$.

1 (a) $u_1=\dfrac{u_0}{1+u_0}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

$u_2=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}$.

$u_3=\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{4}$.

(b) On peut conjecturer que, pour tout entier naturel n, $u_n=\dfrac{1}{n+1}$.

(c) Voici le programme complété.

```
def u(n) :
    u = 1
    for i in range (1, n+1):
        u = u/(u+1)
return u
```

2 On pose $v_n=\dfrac{1}{u_n}$.

(a) Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}\\
&= \frac{1}{\frac{u_n}{u_n+1}}-\frac{1}{u_n}\\
&= \frac{u_n+1}{u_n}-\frac{1}{u_n}\\
&= \frac{u_n}{u_n}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est arithmétique de premier terme 1 et de raison 1.

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0+nr=1+n$.

Dès lors, $v_n=\dfrac{1}{n+1}$.

c $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc par somme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 3 : (7 points)

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage un protocole de traitement d'une maladie.
Ce protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1 **a** $u_1 = (1 - 30\%)u_0 + 1{,}8 = 0{,}7 \times 2 + 1{,}8 = 3{,}2$. Ainsi, 3,2 mg du médicament est présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

b Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = (1 - 30\%)u_n + 1{,}8 = 0{,}7u_n + 1{,}8$.

2 On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

a Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6. \\ &= 0{,}7u_n + 1{,}8 - 6 \\ &= 0{,}7u_n - 4{,}2 \\ &= 0{,}7(u_n - 6) \\ &= 0{,}7v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -4$ et de la raison 0,7.

b Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -4 \times 0{,}7^n$.
Par ailleurs, $u_n = v_n + 6$. Donc, $u_n = -4 \times 0{,}7^n + 6$

c On arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg. Autrement dit, lorsque
$-4 \times 0{,}7^n + 6 > 5{,}5 \Leftrightarrow -4 \times 0{,}7^n > -0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}7^n < \dfrac{1}{8}$.
Par tâtonnement ou en utilisant la calculatrice, on obtient $0{,}7^6 \approx 0{,}118$.
Ainsi, il faudra 6 heures pour que la quantité de médicament dans le sang soit supérieure ou égale à 5,5 mg.

d Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= (6 - 4 \times 0{,}7^0) + (6 - 4 \times 0{,}7^1) + \cdots + (6 - 4 \times 0{,}7^n) \\ &= 6(n+1) - 4 \times \frac{0{,}7^{n+1} - 1}{0{,}7 - 1} \\ &= 6(n+1) + \frac{40}{3}\left(0{,}7^{n+1} - 1\right). \end{aligned}$$

e $-1 < 0{,}7 < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$. Par produit et par somme on obtient,
$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{40}{3}\left(0{,}7^{n+1} - 1\right) = -\dfrac{40}{3}$
Par ailleurs $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par produit et par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(6(n+1) + \frac{40}{3}\left(0{,}7^{n+1} - 1\right)\right) = +\infty.$$