Tle Spé | **Devoir Surveillé n° 13** | Lycée
maths-mde.fr | **.../20** - 1 h 30 | Evariste Galois

Exercice 1 : (15 points)

Partie A : On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' + 0{,}4y = e^{-0{,}4t}.$$

où y est une fonction de la variable réelle t.

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

1 Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = te^{-0{,}4t}$.
Vérifier que u est solution de (E).

2 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = f(t) - u(t).$$

Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0{,}4y = 0$.

- **a** Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).
  On admettra que la réciproque est vraie.
- **b** Résoudre l'équation différentielle (H).
- **c** En déduire les solutions de (E).
- **d** Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B : On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas.
La glycémie en g.L^{-1}, en fonction du temps t, exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,6]$ par :

$$f(t) = (t+1)e^{-0{,}4t}.$$

1
- **a** Montrer que, pour tout $t \in [0\ ;\ 6]$, $f'(t) = (-0{,}4t + 0{,}6)e^{-0{,}4t}$.
- **b** Étudier les variations de f sur $[0\,;\,6]$ puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

2 Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à 0,7 g.L^{-1}.

- **a** Démontrer que sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ l'équation $f(t) = 0{,}7$ admet une unique solution que l'on notera α.
- **b** Au bout de combien de temps après avoir pris son repas cette personne est- elle en hypoglycémie ? On exprimera ce temps à la minute près.

3 On souhaite déterminer la glycémie moyenne en g.L^{-1} chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

- **a** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = -23{,}75e^{-2{,}4} + 8{,}75.$$

- **b** Calculer la glycémie moyenne en g.L^{-1} chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.
- **c** En remarquant que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E), expliquer comment on aurait pu obtenir ce résultat autrement.

Exercice 2 : (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.

On considère :

— les points C(3 ; 0 ; 0), D(0 ; 2 ; 0), H(−6 ; 2 ; 2) et $\text{J}\left(\dfrac{-54}{13} ;\ \dfrac{62}{13} ;\ 0\right)$;

— le plan P d'équation cartésienne $2x + 3y + 6z - 6 = 0$;

— le plan P' d'équation cartésienne $x - 2y + 3z - 3 = 0$;

— la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -8 + \frac{1}{3}t \\ y = -1 + \frac{1}{2}t \\ z = -4 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : La droite (d) est orthogonale au plan P et coupe ce plan en H.

Affirmation 2 : La mesure en degré de l'angle $\widehat{\text{DCH}}$, arrondie à 10^{-1}, est 17,3°.

Affirmation 3 : Les plans P et P' sont sécants et leur intersection est la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 4 : Le point J est le projeté orthogonal du point H sur la droite (CD).