Devoir Surveillé n° 13

Corrigé - 1 h

Exercice 1 : (15 points)

Partie A : On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' + 0{,}4y = e^{-0{,}4t}.$$

où y est une fonction de la variable réelle t.

1 Posons : $a(t) = t$ et $b(t) = e^{-0{,}4t}$. Ainsi, $u(t) = a(t)b(t)$. En calculant la dérivée, on obtient :

$$\begin{aligned} u'(t) &= a'(t)b(t) + a(t)b't) \\ &= 1 \times e^{-0{,}4t} + t \times \left(-0{,}4e^{-0{,}4t}\right) \\ &= e^{-0{,}4t} - 0{,}4te^{-0{,}4t}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} u'(t) + 0{,}4u(t) &= e^{-0{,}4t} - 0{,}4te^{-0{,}4t} + 0{,}4te^{-0{,}4t} \\ &= e^{-0{,}4t}. \end{aligned}$$

En conséquence u est bel et bien une solution particulière de (E).

2 **a** g est une solution de l'équation différentielle (H) donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) + 0{,}4g(t) = 0$. Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(t) - u'(t) + 0{,}4\big(f(t) - u(t)\big) = 0 \quad &\text{si et seulement si} \quad f'(t) - u'(t) + 0{,}4f(t) - 0{,}4u(t) = 0 \\ &\text{si et seulement si} \quad f'(t) + 0{,}4f(t) = u'(t) + 0{,}4u(t) \\ &\text{si et seulement si} \quad f'(t) + 0{,}4f(t) = e^{-0{,}4t}, \\ &\qquad \text{car, u est une solution particulière de (E).} \end{aligned}$$

Ce qui revient à dire que f est solution de (E).

b L'équation différebtielle (H) : $y' + 0{,}4y = 0$ est de la forme $y' = ay$ avec $a = -0{,}4$.
Ainsi, les solutions de cette équation différentiele sont les fonctions de la forme : $S(t) = Ce^{-0{,}4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

c D'après les questions précédentes, f est solution de (E) si et seulement si $g = f - u$ est solution de (H). Ainsi, Les solutions de (E) sont les fonction f telles que : $f(t) = u(t) + g(t) = te^{-0{,}4t} + Ce^{-0{,}4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

d $f(0) = 1$ donc $(0 + C)e^0 = 1$, soit $C = 1$.
En conséquence, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = (t+1)e^{-0{,}4t}$.

Partie B

1 **a** Posons : $a(t) = t + 1$ et $b(t) = e^{-0{,}4t}$. Ainsi, $f(t) = a(t)b(t)$. En calculant la dérivée, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(t) &= a'(t)b(t) + a(t)b't) \\ &= 1 \times e^{-0{,}4t} + (t+1) \times \left(-0{,}4e^{-0{,}4t}\right) \\ &= e^{-0{,}4t} - 0{,}4te^{-0{,}4t} - 0{,}4e^{-0{,}4t} \\ &= 0{,}6e^{-0{,}4t} - 0{,}4te^{-0{,}4t} \\ &= (-0{,}4t + 0{,}6)e^{-0{,}4t}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

b On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-0{,}4t} > 0$ donc le signe de $f'(t)$ est celui de $-0{,}4t + 0{,}6$. Ainsi,

$$\begin{aligned} -0{,}4t + 0{,}6 > 0 &\iff -0{,}4t > -0{,}6 \\ &\iff t < \frac{-0{,}6}{-0{,}4} \quad \text{car } -0{,}4 < 0 \\ &\iff t < 1{,}5 \end{aligned}$$

On déduit alors le tableau de variations suivant :

x	0		1.5		6
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	1	$\nearrow$	$2.5e^{-0.6}$	$\searrow$	$7e^{-2.4}$

2 **a** La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ 1{,}5]$. De plus $f(0) = 1 > 0{,}7$, donc l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.

Par ailleurs f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[1{,}6\ ;\ 6]$.

De plus, $f(1{,}5) \approx 1{,}37 > 1$ et $f(6) \approx 0{,}63 < 1$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué, l'équation $f(t) = 0{,}7$ admet une unique solution α sur $[1{,}5\ ;\ 6]$.

D'où le résultat.

b En utilisant la calculatrice, on obtient : $\alpha \approx 5{,}62$ heures.

Or, $0{,}62 \times 60 \approx 37$ minutes. Donc, la personne est en hypoglycémie au bout de 5 heures et 37 minutes après le repas.

3 **a** Posons, $u(t) = t + 1$ et $v'(t) = e^{-0{,}4t}$. Ainsi, $u'(t) = 1$ et $v(t) = \dfrac{1}{-0{,}4}e^{-0{,}4t} = -2{,}5e^{-0{,}4t}$.

En utilisant la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^6 (t+1)e^{-0{,}4t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^6 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[u(t)v(t)\Big]_0^6 - \int_0^6 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[(t+1)\times\left(-2{,}5e^{-0{,}4t}\right)\Big]_0^6 - \int_0^6 1\times\left(-2{,}5e^{-0{,}4t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[-2{,}5(t+1)e^{-0{,}4t}\Big]_0^6 + 2{,}5\int_0^6 e^{-0{,}4t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left(-2{,}5\times 7e^{-2{,}4}\right) - \left(-2{,}5\times 1\times e^{0}\right) + 2{,}5\Big[-2{,}5e^{-0{,}4t}\Big]_0^6 \\
&= -17{,}5e^{-2{,}4} + 2{,}5 + 2{,}5\left[\left(-2{,}5e^{-2{,}4}\right) - \left(-2{,}5e^{0}\right)\right] \\
&= -17{,}5e^{-2{,}4} + 2{,}5 - 6{,}25e^{2{,}4} + 6{,}25 \\
&= -23{,}75e^{-2{,}4} + 8{,}75.
\end{aligned}$$

b La glycémie moyenne pendant la période de six heures est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6-0}\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{6}(-23{,}75e^{-2{,}4} + 8{,}75) \\
&= \frac{95e^{-2{,}4} + 35}{24} \quad \text{(ceci est la valeur exacte)}. \\
&\approx 1{,}099 \quad \text{valeur approchée au millième.}
\end{aligned}$$

Autrement dit, la glycémie moyenne lors des six heures suivant le repas est d'environ 1,10 $g.L^{-1}$.

c On sait que f est solution de (E), donc : $f' + 0{,}4f = e^{-0{,}4t}$. Autrement dit, $0{,}4f(t) = e^{-0{,}4t} - f'(t)$, soit $f(t) = 2{,}5(e^{-0{,}4t} - f'(t))$.

On en déduit qu'une primitive de f peut s'exprimer sous la forme : $F(t) = 2{,}5\left(-2{,}5e^{-0{,}4t} - f(t)\right)$.

En conséquence,

$$\begin{aligned}
\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[\left(-8{,}75 - 2{,}5t\right)e^{-0{,}4t}\Big]_0^6 \\
&= (-8{,}75 - 2{,}5\times 6)\,e^{-0{,}4\times 6} - (-8{,}75 - 2{,}5\times 0)\,e^{-0{,}4\times 0} \\
&= -23{,}75e^{-2{,}4} + 8{,}75.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 2 : (5 points)

⇝ **Affirmation 1**

Selon la représentation paramétrique donnée le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) et d'après l'équation cartésienne de P , $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

De plus, $\overrightarrow{n} = 6\,\overrightarrow{u}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires et par conséquent (d) est orthogonale à P.
Par ailleurs, $2x_H + 3y_H + 6z_H - 6 = 2\times(-6) + 3\times 2 + 6\times 2 - 6 = 0$, donc $H \in P$.
Vérifions à présent que $H \in (d)$.

H$(-6\ ;\ 2\ ;\ 2) \in (d)$ s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} -6 &= -8 + \frac{1}{3}t \\ 2 &= -1 + \frac{1}{2}t \\ -4 &= -4 + t \end{cases} \iff \begin{cases} -18 &= -24 + t \\ 4 &= -2 + t \\ 2 &= -4 + t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 6 &= t \\ 6 &= t \\ 6 &= t \end{cases}$

t extsite existe, donc $H \in (d) \cap P$. en conséqeunce, **l'affirmation 1 est donc vraie**.

⇝ **Affirmation 2**

On a : $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-9\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CD} = -9\times(-3) + 2\times 2 + 2\times 0 = 31$.
De plus, $\|\overrightarrow{CH}\| = \sqrt{(-9)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{89}$ et $\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}$.
Par ailleurs, on a par définition : $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{CH}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos\left(\widehat{DCH}\right)$. Ainsi,

$\cos\left(\widehat{DCH}\right) = \dfrac{\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CH}\| \times \|\overrightarrow{CD}\|} = \dfrac{31}{\sqrt{89}\times\sqrt{13}}$.

En utilisant la calculatrice on obtient : $\widehat{DCH} \approx 24{,}3°$. En conséquence, **l'affirmation 2 est donc fausse**.

⇝ **Affirmation 3 :**

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P ; $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P'.

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires donc les plan P et P' ne sont pas parallèles, ils sont donc sécants, leur intersection est une droite.
Par ailleuurs,

$\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 6 = 0 & L_1 \\ x - 2y + 3z - 3 = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 6z - 6 = 0 & L_1 \\ 2x - 4y + 6z - 6 = 0. & 2L_2 \end{cases}$ La combinaison linéaire $L_1 - 2L_2$ implique $7y = 0$, soit $y = 0$.

Ce donne par substitution,

$\begin{cases} 2x + 6z - 6 = 0 & L_1 \\ x + 3z - 3 = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 - 3z.$

En posant $z = t$, on obtient une réprésentation pramètrique de la droite Δ selon laquelle les plans P et P' sont sécants.

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En conséquence, **l'affirmation 3 est bien vraie**.

Affirmation 4

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (CD).

Une représentation paramétrique de la droite (CD) passant par le point C est alors donnée par :

$$\begin{cases} x = 3 - 3s \\ y = 2s \\ z = 0 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

$J \in (CD)$ si le système $\begin{cases} -\dfrac{54}{13} = 3 - 3s \\ \dfrac{62}{13} = 2s \\ 0 = 0 \end{cases}$ admet une solution.

C'est le cas puisque $s = \dfrac{31}{13}$.

De plus, $\overrightarrow{HJ}\begin{pmatrix} \frac{24}{13} \\ \frac{36}{13} \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{CD} = \dfrac{24}{13} \times (-3) + \dfrac{36}{13} \times 2 + (-2) \times 0 = 0$

Ainsi, les deux vecteurs $\overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

En conséquence, J est bel et bien le projeté orthogonal de H sur (CD). Autrement dit, **l'affirmation 4 est vraie**.