Tle Spé
maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 10

...../10 - 30 minutes

Lycée
Evariste Galois

Question 1 : (1 point)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= 0\times 1+(-2)\times(-2)+(-1)\times\sqrt{2}\\ &= 4-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Question 2 : (1 point)

On sait que : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= 3\sqrt{2}\times 5\times\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\ &= 15\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= -15.\end{aligned}$$

Question 3 : (1 point)

On sait que : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos\left(\theta\right)$. Ainsi, $\cos(\theta)=\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|}$.
Par ailleurs, on a d'une part,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= 1\times 0+\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}+(-1)\times 1\\ &= 4-1\\ &= 3.\end{aligned}$$

Et, d'autre part,

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}\| &= \sqrt{1^2+\sqrt{2}^2+1^2}\\ &= 2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{v}\| &= \sqrt{0^2+(2\sqrt{2})^2+1^2}\\ &= 3.\end{aligned}$$

Dès lors, $\cos(\theta)=\dfrac{3}{2\times 3}=\dfrac{1}{2}$. En conséquence, $\theta=\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$, soit $\theta=60^\circ$.

Question 4 : (1 point)

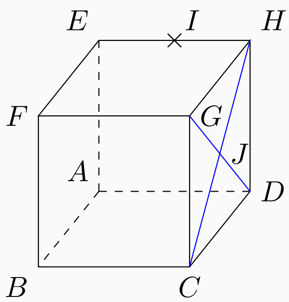
On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté $a>0$. Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.

1 En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{GD} &= \overrightarrow{HI}\cdot(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HD})\\ &= \overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HD}\\ &= 0,\text{car}\quad (IH)\perp(HD)\text{ et }(IH)\perp(HG).\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ J est le milieu de [GD] donc $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD}$. Dès lors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GJ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GD} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GH} \quad \text{car H est le projeté orthogonal de D sur (GH)} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} \quad \text{car } \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BA} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 \\
&= -\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2 \\
&= -\frac{AB^2}{2} \\
&= -\frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$



Question 5 : (1 point)

Déterminons b et c tels que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne :

$$-\sqrt{2}x + 3y + z + 8 = 0.$$

$\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\3\\1\end{pmatrix}$ est également un vecteur normal du $(\mathscr{P})$.

$\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont donc colinéaires, il existe donc un réel t tel que $\overrightarrow{n'} = t\overrightarrow{n}$, autrement dit,

$$\begin{cases}-\sqrt{2} = t\\ 3 = tb \\ 1 = tc\end{cases} \qquad \text{soit,} \quad \begin{cases}-\sqrt{2} = t\\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} = b \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} = c\end{cases}.$$

D'où le résultat.

Question 6 : (1 point)

Soit $M(x;y;z)$ un point du plan nommé $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z-2\end{pmatrix}$ est un vecteur de ce plan. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 5(x+1) - 3(y-1) + 1(z-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 5x - 3y + z + 6 = 0. \quad (E)
\end{aligned}$$

En conséquence, (E) est une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Question 7 : (1 point)

$\overrightarrow{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $(\mathscr{P}_1)$.

$\overrightarrow{n}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $(\mathscr{P}_2)$.

De plus, $-\dfrac{1}{3} \neq -\dfrac{3}{2}$ donc les deux vecteurs $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ ne sont pas colinéaires. Autrement dit, $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ ne sont pas parallèles. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 3x-2y+z=5 \\ -x+3y+2z=1 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x-2y+z=5 \\ x=3y+2z-1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3(3y+2z-1)-2y+z=5 \\ x=3y+2z-1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 7y+7z=8 \\ x=3y+2z-1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=-y+\dfrac{8}{7} \\ x=3y+2z-1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=-y+\dfrac{8}{7} \\ x=y+\dfrac{9}{7} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=t+\dfrac{9}{7} \\ y=t \\ z=-t+\dfrac{8}{7} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad t\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En conséquence, les deux plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont sécants selon la droite passant par le point $A\left(\dfrac{9}{7};0;\dfrac{8}{7}\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Question 8 : (1 point)

La distance du point A au plan $(\mathcal{P})$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
d\left(\mathrm{A}\ ;\ \mathcal{P}\right) &= \frac{|ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\
&= \frac{|3\times(-1)-5\times 2+1\times(-3)-1|}{\sqrt{3^2+(-5)^2+1^2}} \\
&= \frac{17}{\sqrt{35}}.
\end{aligned}$$

Question 9 : (1 point)

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A(0;-1;3)$ et parallèle au plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $2x+3y-5z=1$.

Soit $(\mathcal{P}')$ le plan parallèle à $(\mathcal{P})$ passant par le point $A(0;-1;3)$.
$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.
$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$ est également un vecteur normal de $(\mathcal{P}')$, car $(\mathcal{P})//(\mathcal{P}')$.
Soit $M(x;y;z)\in(\mathcal{P}')$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0 &\Leftrightarrow 2(x-0)+3(y-(-1))-5(z-3)=0\\ &\Leftrightarrow 2x+3y-5z+4=0.\ \ (E)\end{aligned}$$

En conséquence, (E) est une équation cartésienne de $(\mathcal{P}')$.

Question 10 : (1 point)

On sait que :
$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).
De plus, $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=2\times2+(-3)\times1+5\times1=6\neq0$.
Les deux vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas orthogonaux, donc $(\mathcal{P})$ et (d) sont sécants.
Soit $I(x_I;y_I;z_I)\in(\mathcal{P})\cap(d)$. Ainsi, il existe un réel k tel que :

$$\begin{cases}x_I=1+2k\\ y_I=k\\ z_I=-2+k\end{cases}.$$

Par ailleurs, $2x_I-3y_I+5z_I+2=0$. On obtient alors par substitution, $2(1+2k)-3k+5(-2+k)+2=0$, soit $k=1$.
En conséquence, $(3;1;-1)$ sont les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{P})$ et (d).