Tle Spé — maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 1

Corrigés

Lycée Evariste Galois

Question 1 : (1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - n + 1$. L'expression du terme u_{n+1} en fonction de n est alors donnée par :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2(n+1)^2 - (n+1) + 1 \\ &= 2(n^2 + 2n + 1) - n - \cancel{1} + \cancel{1} \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - n \\ &= 2n^2 + 3n + 2. \end{aligned}$$

Question 2 : (1 point)

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_1 = \dfrac{1}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{n+1}{n} \times v_n$. Dès lors,
$v_2 = \dfrac{1+1}{1} \times v_1 = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$ et $v_3 = \dfrac{2+1}{2} \times v_2 = \dfrac{3}{2} \times 1 = \dfrac{3}{2}$.

Question 3 : (1 point)

(u_n) est une suite arithmétique de raison r, ainsi $u_n = u_p + (n-p)r$ avec $n \geqslant p$ et $p, n \in \mathbb{N}$. Dès lors,
$u_{14} = u_3 + (14-3)r \Leftrightarrow r = \dfrac{u_{14} - u_3}{14 - 3} = \dfrac{392 - 95}{11} = 27$.

Question 4 : (1 point)

(u_n) est une suite géométrique définie par $u_2 = 1$ et la raison $q = \frac{1}{2}$.
Ainsi, $u_n = u_p \times q^{n-p}$, pour tout $n \geqslant p \geqslant 2$.
Dès lors, $u_n = u_2 \times q^{n-2} = 1 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} = \dfrac{1}{2^{n-2}}$.

Question 5 : (1 point)

(u_n) est une suite arithmétique de raison r, ainsi $u_n = u_p + (n-p)r$ avec $n \geqslant p \geqslant 3$. Dès lors,
$u_{14} = u_3 + (14-3)r \Leftrightarrow r = \dfrac{u_{14} - u_3}{14 - 3} = \dfrac{37 - 15}{11} = 2$.
Par ailleurs, $u_n = u_0 + nr \Leftrightarrow u_0 = u_n - nr$. Ainsi, $u_0 = u_3 - 3 \times 2 = 15 - 6 = 9$.

Question 6 : (1 point)

(v_n) est une suite géométrique de raison q. Ainsi, $u_n = u_p \times q^{n-p}$, pour tout $n \geqslant p \geqslant 0$.
Dès lors, $v_6 = v_3 \times q^{(6-3)} \Leftrightarrow q^3 = \dfrac{81}{3} \Leftrightarrow q = \sqrt[3]{27} = 3$.
Par ailleurs, $v_n = v_0 \times q^n \Leftrightarrow v_0 = \dfrac{v_n}{q^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $v_0 = \dfrac{v_3}{3^3} = \dfrac{1}{9}$.

Question 7 : (1 point)

Posons : $S = 3 + 9 + 15 + 21 + \cdots + 663$.
L'écart entre les termes consécutifs de S est constant, $9 - 3 = 15 - 9 = 21 - 15 = 6$.
Il s'agit donc d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 6.
Par ailleurs, $\dfrac{\text{dernier terme} - \text{1er terme}}{\text{raison}} = \dfrac{663 - 3}{6} = 110$, donc 110 est le rang du dernier terme. Dès lors,

$$S = \sum_{k=0}^{110} (3 + 6k) = (110 + 1) \times \frac{3 + 663}{2} = 36\ 963.$$

Question 8 : (1 point)

(u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$. Ainsi, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 50 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.
Dès lors,

$$\begin{aligned}
u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= u_1 + u_1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^1 + u_1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cdots + u_1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{100-1} \\
&= u_1 \left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^{100-1}\right) \\
&= 50 \times \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{100} - 1}{\frac{2}{5} - 1} \\
&= 50 \times \frac{-5}{3} \times \left[\left(\frac{2}{5}\right)^{100} - 1\right] \\
&= -\frac{250}{3} \times \left[\left(\frac{2}{5}\right)^{100} - 1\right].
\end{aligned}$$

Question 9 : (1 point)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{-4}{u_n + 4}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2 + u_{n+1}} - \frac{1}{2 + u_n} \\
&= \frac{1}{2 + \frac{-4}{u_n + 4}} - \frac{1}{2 + u_n} \\
&= \frac{1}{\frac{2(u_n+4)-4}{u_n+4}} - \frac{1}{2 + u_n} \\
&= \frac{u_n + 4}{2(u_n + 2)} - \frac{2}{2(2 + u_n)} \\
&= \frac{u_n + 4 - 2}{2(u_n + 2)} \\
&= \frac{u_n + 2}{2(u_n + 2)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, (v_n), est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 2.

Question 10 : (1 point)

Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: $1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$.
Initialisation : Pour $n=0$, on a : $(0+1)^2=1+2\times 0=1$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie (l'hypothèse de récurrence). Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi, Autrement dit,

$$1+3+5+\cdots+(2n+3)=(n+2)^2.$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2n+1)+(2n+3) &= (n+1)^2+2n+3 \\ &= n^2+2n+1+2n+3 \\ &= n^2+4n+4 \\ &= (n+2)^2. \end{aligned}$$

L'hérédité est donc vérifiée.
Conclusion : Pour tout entier naturel n, $1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$.