Corrigé : Devoir Maison n°3

Exercice 1 : (8 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Partie A

1. f est dérivable comme composée, quotient et somme de fonctions dérivables sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
   Posons : $u(x) = x$ et $v(x) = 1+x$. Ainsi, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$. Dès lors, pour tout x de $]-1\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = u(x) - \frac{\ln v(x)}{v(x)} \text{ et } f'(x) = u'(x) - \left(\frac{\ln v(x)}{v(x)}\right)' = u'(x) - \frac{\frac{v'(x)}{v(x)} \times v(x) - v'(x)\ln v(x)}{v(x)^2} = u'(x) - \frac{1 - v'(x)\ln v(x)}{v(x)^2} = 1 - \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

2. On pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$. N est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables sur $]-1\ ;\ +\infty[$. Dès lors,

$$N'(x) = 2 \times 1 \times (1+x) + \frac{1}{1+x} = \frac{2(1+x)^2+1}{1+x}.$$

   Or, pour tout $x \in]-1\ ;\ +\infty[$, $1+x > 0$ et $2(1+x)^2 + 1 > 1 > 0$. Donc, pour tout $x \in]-1\ ;\ +\infty[$, $N'(x) > 0$. Autrement dit, N est strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
   De plus, $N(0) = 0$ ce qui veut dire que $N(x) < 0$ sur $]-1\ ;\ 0[$ et $N(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.
   Par ailleurs, $f'(x) = \dfrac{N(x)}{(1+x)^2}$. Ainsi, le signe de $f'(x)$ est le mêm que celui $N(x)$ car $(1+x)^2 > 0$ pour tout réel x.
   En conséquence, $f'(x) \leqslant 0$ sur $]-1\ ;\ 0]$ et $f'(x) \geqslant 0$ sur $]0; +\infty[$.
   Déterminons à présent les limites en 0 et en $+\infty$.
   On a d'une part, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1} \ln(x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty \end{cases}$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-1^+} -\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$.
   Finalement, par somme de limites, on obtient : $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$.
   D'autre part, on sait que, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty. \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0 \text{ par croissance comparée.} \end{cases}$
   Ainsi, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$. Enfin, par addition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 1 : (8 suite)

3. $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $y = x$. Pour obtenir les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{C}$, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = x$. Dès lors,

$$\begin{aligned}-\frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 &\iff \ln(1+x) = 0\\ &\iff 1+x = 1\\ &\iff x = 0.\end{aligned}$$

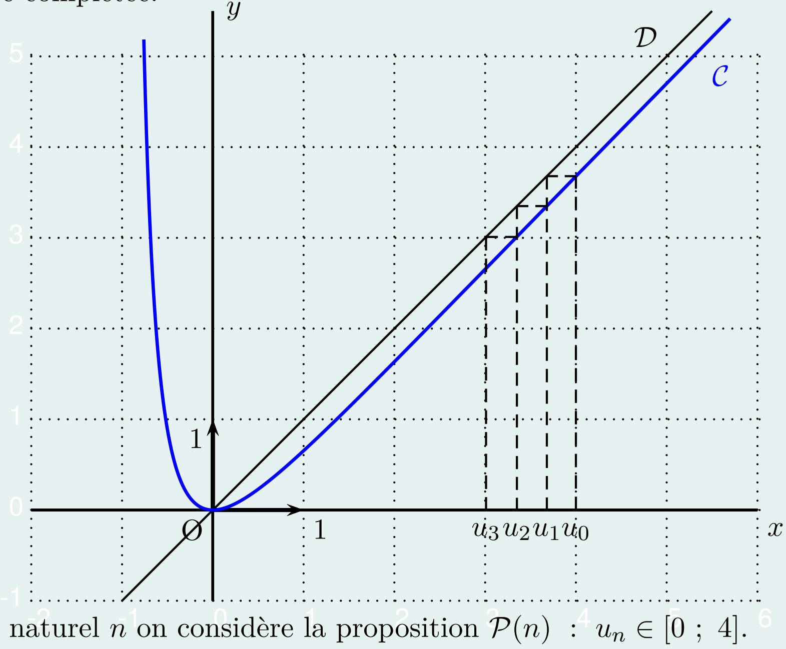
Ainsi, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ se coupent à l'origine $O(0;0)$.

Partie B

1. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, donc pour tout $x \in [0\ ;\ 4]$, $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$.

   Par ailleurs, $f(0) = 0$ et $f(4) = 4 - \dfrac{\ln 5}{5} < 4$. Ainsi, $f(x) \in [0\ ;\ 4]$.

2. (a) Ci-après la courbe complétée.



   (b) Pour tout entier naturel n on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in [0\ ;\ 4]$.
   - Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 4 \in [0\ ;\ 4]$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraire
   - Hérédité : Soit $n \in \mathcal{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
     Par hypothèse de récurrence, on a : $u_n \in [0\ ;\ 4]$.
     Et d'après la question 1., on a : $u_{n+1} = f(u_n) \in [0\ ;\ 4]$.
     Autrement dit, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.
   - Conclusion : Selon le principe de récurrence, $u_n \in [0\ ;\ 4]$ pour tout n.

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n\\ &= u_n - \frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} - u_n\\ &= -\frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}.\end{aligned}$$

   Or, $1 + u_n \geqslant 1$ donc $\ln(1+u_n) \geqslant 0$. En conséquence, la suite (u_n) est décroissante.

   (d) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.
   Ainsi, selon le théorème de croissance montone, (u_n) est convergente vers un réel ℓ.

   (e) f étant continue, d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Par conséquent $\ell = 0$.

Exercice 2 : (8 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère :

- le plan $\mathcal{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point B(1 ; 1 ; 2) et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. (a) $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $2x + y - z + 2 = 0$.

   (b) $\overrightarrow{n_1} . \overrightarrow{n_2} = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux.
   On en déduit que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. (a) Le plan $\mathcal{P}_2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, donc il a une équation cartésienne de la forme $x - y + z + d = 0$ où d est un réel à déterminer.
   Or, $\mathrm{B} \in \mathcal{P}_2$ donc $x_\mathrm{B} - y_\mathrm{B} + z_\mathrm{B} + d = 0$, autrement dit $1 - 1 + 2 + d = 0$ soit $d = -2$.
   En conséquence, le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation cartésienne $x - y + z - 2 = 0$.

   (b) L'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifiant le système: $\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 & L_1 \\ x - y + z - 2 = 0 & L_2 \end{cases}$.
   La combinaison linéaire $L_1 + L_2$ entraine $3x = 0$, soit $x = 0$.
   Par substitution dans L_2, on obtient : $-y + z - 2 = 0$ soit $y = z - 2$.
   Enfin, en remplaçant $z = t$, on obtient une représentation paramétrique d'une droite Δ selon laquelle les deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t - 2 \\ z = t \end{cases} \qquad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}.$$

On considère le point A(1 ; 1 ; 1) et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$.
On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\ ;\ -2 + t\ ;\ t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

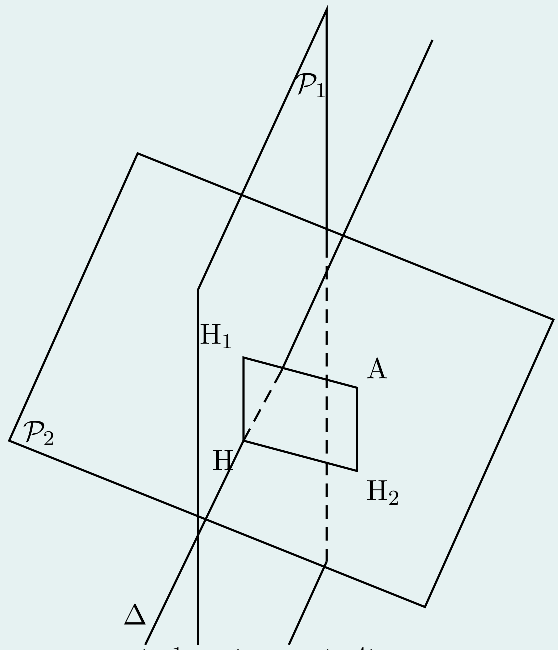
   (a) Pour tout réel t, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{AM}_t &= \sqrt{(0-1)^2 + (-2+t-1)^2 + (t-1)^2} \\ &= \sqrt{1 + (9 - 6t + t^2) + (t^2 - 2t + 1)} \\ &= \sqrt{2t^2 - 8t + 11}. \end{aligned}$$

   (b) Le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite Δ, donc la longueur AH est la distance minimale séparant A et la Δ.
   Pour déterminer la valeur minimale de AM_t où M_t est un point de Δ, il suffit d'étudier les variations du trinôme $2t^2 - 8t + 11$.
   Le discriminant ce ce trinôme est égal à $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 11 = -14$.
   Δ étant < 0, ce trinôme est du même signe que son coefficient principal 2. Sa courbe représentative est une parabole orientée vers le haut.
   Dès lors, la valeur minimale de ce trinôme est atteinte en $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-8}{2 \times 2} = 2$ et vaut $f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 11 = 3$.
   En conséquence, $\mathrm{AH} = \sqrt{3}$.

Exercice 2 : (suite)

4. On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}_1$.
   (a) La droite $\mathcal{D}_1$ étant perpenduculaire au plan $\mathcal{P}_1$, le vecteur $\overrightarrow{n_1}$, normal au plan $\mathcal{P}_1$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1$.
   De plus la droite $\mathcal{D}_1$ passe par le point A. En conséquebce une réprésentation paramètrique de représentation paramétrique $\mathcal{D}_1$ est donnée par :
   $\begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + 2t \\ y = y_{\mathrm{A}} + t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_{\mathrm{A}} - t. \end{cases}$ Autement dit, $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t \end{cases}$
   (b) H_1 le projeté orthongonal de A sur $\mathcal{P}_1$ est le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}_1$ et du plan $\mathcal{P}_1$, Ses coordonnées vérifiées alors :
   $$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \\ 2x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$
   Ce qui implique que t vérifie $2(1+2t) + (1+t) - (1-t) + 2 = 0$, soit $2 + 4t + 1 + t - 1 + t + 2 = 0$, et donc $t = -\dfrac{2}{3}$.
   Dès lors, $x = 1 + 2t = 1 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3}$, $y = 1 + t = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ et $z = 1 - t = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$
   En conséqeunce, le point H_1 a bel et bien pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right)$.
5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}_2$. On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 2)$. Sur le schéma ci-dessous, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.



Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AH}_1}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - 1 \\ \frac{1}{3} - 1 \\ \frac{5}{3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{H}_2\mathrm{H}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 - \frac{4}{3} \\ 0 - \frac{2}{3} \\ 2 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{AH}_1} = \overrightarrow{\mathrm{H}_2\mathrm{H}}$. Ce qui implique que le quadrilatère $\mathrm{AH}_1\mathrm{HH}_2$ est un parallélogramme.
Par ailleurs, la droite (AH_1) est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ et H_1 appartient à ce plan; donc (AH_1) est perpendiculaire à toutes les droites de $\mathcal{P}_1$ passant par H_1, en particulier la droite (HH_1).
En conséquence, le parallélogramme $\mathrm{AH}_1\mathrm{HH}_2$ possède un angle droit donc c'est un rectangle.

Exercice 3 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3+2x^2-x+3}{x^2+1}$.

1. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{x^2+1} \\ &= \frac{(ax+b)(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{c}{x^2+1} \\ &= \frac{ax^3 + ax + bx^2 + b + c}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ b + c = 3 \end{cases}$ soit, $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 - 2 = 1. \end{cases}$ En conséquence, $f(x) = -x + 2 + \dfrac{1}{x^2+1}$.

2. D'après la question précédente, on a : $f(x) - (-x+2) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

   Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+1) = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.
   En conséquence, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (-x+2) = 0$.

   Idem, en utilisant une justification bien analogue, on obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.

3. De la question précédente on déduit que la fonction f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y = -x + 2$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x+2) > 0$ soit, $f(x) > -x + 2$.
   Autrement dit, au voisinge de $+\infty$ et $-\infty$, la courbe $\mathscr{C}$ est située au dsuus de Δ.

Bon courage !