Corrigé : Devoir Maison n°2

Exercice 1 : (6 points)

Pour un réel a strictement positif quelconque, on considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & > 0 \\ u_{n+1} & = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right). \end{cases}$$

1. Ci-après le script complété :

```
def heron(a,u,n):
    if u <=0:
        return "Le premier terme doit être strictement positif."
    elif a <= 0:
        return "La valeur de 'a' doit être strictement positive."
    else:
        L = [ u ]
        k = 0
        while k < n:
            u = 0.5 * (u + a / u)
            L.append(u)
            k = k + 1
        return L
```

2. L'instruction renvoie la liste suivante:
[7, 3.7857142857142856, 2.4211590296495955, 2.0366301688743387, 2.0003294091613366, 2.0000000271231317, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0]
On constate alors :
   - d'une part que la suite (u_n) semble être décroissante;
   - d'autre part, que la suite (u_n) semble converger vers 2.

   On se propose d'étudier mathématiquement la suite (u_n) pour une valeur de $a > 0$.
Pour cela, on introduit la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par :
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

3. f est une fonction bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, car c'est la somme d'une focntion linéaire et d'une fonction inverse, elles mêmes bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction f est dérivales sur $\mathbb{R}_+^*$, comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi,
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) = \frac{x^2 - a}{2x^2}.$$
$x^2 - a$ est un polynôme du second degré dont les racines sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, d'où le tableau de variation suivant.

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	$\sqrt{a}$	↗	

4. D'après les variations de f, si $x \in]0; \sqrt{a}]$ alors $f(x) \geqslant \sqrt{a}$.
Or, $u_1 = f(u_0)$ donc si $u_0 \in]0; \sqrt{a}]$ alors $u_1 \geqslant \sqrt{a}$.
De plus, si $u_0 \geqslant \sqrt{a}$, d'après les variations de f, $f(u_0) \geqslant \sqrt{a}$.
Ainsi, quelle que soit la valeur de $u_0 > 0$, $u_1 \geqslant \sqrt{a}$.

Exercice 1 : (suite)

5. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = f(x) - x$. On a alors :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) - x \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} - x\right). \end{aligned}$$

g est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi,

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{a}{x^2} - 1\right).$$

On remarque alors que, $g'(x) < 0$ sur $]\sqrt{a}; +\infty[$, ce qui signifie que g est strictement décroissante $]\sqrt{a}; +\infty[$.
De plus, $g(\sqrt{a}) = 0$ donc $g(x) \leqslant 0$ sur $]\sqrt{a}; +\infty[$.
En conséquence $f(x) - x \leqslant 0$, soit $f(x) \leqslant x$.

6. Pour tout entier naturel non n, considérons la proposition : $\mathcal{P}(n) : \sqrt{a} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   - Initialisation. Pour $n = 1$, on a : $u_1 > \sqrt{a}$ et $u_2 = f(u_1) \leqslant u_1$ d'après la question précédente. On a donc bel et bien $\sqrt{a} \leqslant u_2 \leqslant u_1$. L'initialisation est alors réalisée.
   - Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraiz pour un certain entier $n > 1$ et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
     D'après la question 3, f est strictement croissante sur $]\sqrt{a}; +\infty[$ donc,
     $$f(\sqrt{a}) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n).$$
     Soit,
     $$\sqrt{a} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}.$$
     L'hérédité est ainsi vérifiée.
   - Conclusion : Selon le principe de récurrence, on déduit que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\sqrt{a} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

7. La suite (u_n) est, d'après la question précédente, décroissante et minorée. Donc d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge. On nommera ℓ cette limite.

8. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. D'après le théorème de point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Autrement dit,

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff g(\ell) = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\ell} - \ell\right) = 0 \\ &\iff \frac{a}{\ell} - \ell = 0 \\ &\iff \frac{a - \ell^2}{\ell} = 0 \\ &\iff a - \ell^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \ell \neq 0 \\ &\iff (\sqrt{a} - \ell)(\sqrt{a} + \ell) = 0 \quad \text{avec} \quad \ell \neq 0 \\ &\iff \ell = -\sqrt{a} \text{ ou } \ell = \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Or, $\ell > 0$ car $u_n > 0$. Donc $\ell = \sqrt{a}$.
En conséquence, la limite de (u_n) est égale $\sqrt{a}$.

Exercice 2 : (4 points)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$; $\quad g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ car c'est le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   De plus, g est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x^2+1}$. $g' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Dès lors,

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1 \times \sqrt{x^2+1} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \\
&= \frac{\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \\
g'(x) &= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}
$$

   Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2+1) > 0$ et $\sqrt{x^2+1} > 0$. Ainsi, $g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
   En conséquence, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Première méthode : La fonction g est impaire, en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = g(x)$. Ainsi, le domaine de définition de g est centré en 0. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Par ailleurs,

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} \qquad \text{pour } x \neq 0 \\
&= \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \qquad \text{pour } x > 0.
\end{aligned}
$$

   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc, par somme et composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$.
   En conséquence, par quotient, on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.
   Deuxième méthode : La limite en $+\infty$ est obtenue de la même manière. Déterminins la limite en $-\infty$. Pour tout $x < 0$, on a:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} \qquad \text{pour } x \neq 0 \\
&= \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.
\end{aligned}
$$

   Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc, par somme et composition de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$. En conséquence, par quotient, on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

Exercice 2 : (suite)

3. f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi,
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 2 \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 2 \end{aligned}$$
   $f'(x) = g'(x) - 2$.
   Par ailleurs, on sait que, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$. Donc, $g(x) < 1$ sur $\mathbb{R}$.
   Par conséquent, $g(x) - 2 < 0$ sur $\mathbb{R}$, et donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.
   f est alors strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. f est strictement décroissante et continue sur $]0;1[$.
   De plus, $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = \sqrt{2} - 2 < 0$.
   Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, plus précisément selon le théorème de bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0;1[$. En utilisant la calculatrice, on obtient : $\alpha \approx 0,58$.