Devoir commun numéro 1

Samedi 29 novembre 2025

Spécialité Mathématiques

Le sujet comporte 3 exercices répartis sur 3 pages.

Tous les calculs doivent être détaillés et toutes les réponses justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée **en mode examen**.

Durée de l'épreuve 3 h 30

Exercice 1

7 points/20

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B. Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A : Évolution de la population dans le milieu A

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0,93$.

Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

0,25 pt **1** Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

0,5 pt **2** Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

0,5 pt **3** Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : Évolution de la population dans le milieu B

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

0,5 pt **1** Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

0,75 pt (a) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 11]$.

1 pt (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

0,5 pt (c) En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.

0,5 pt (d) On admet que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, déduire la valeur de ℓ.

0,25 pt (e) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C : Évolution de la population dans les deux milieux

0,5 pt **1** (a) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.

0,5 pt (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.

0,25 pt (c) Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.

2 On considère le programme Python ci-après.

```
n=0
u=6
v=6
while ...... :
       u = .....
       v = .....
       n = n+1
print(2025 + n)
```

0,75 pt (a) Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.

0,25 pt (b) Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

Exercice 2

7 points/20

Au cours d'une séance, un joueur de volley-ball s'entraîne à faire des services. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,85.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à 0,6;
- si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant est égale à 0,6.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Partie A

On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

0,5 pt **1** Représenter la situation par un arbre pondéré.

0,75 pt **2** Démontrer que la probabilité de l'évènement R_2 est égale à 0,57.

0,75 pt **3** Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.

1,5 pt **4** Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de services réussis au cours des deux premiers services.

(a) Déterminer la loi de probabilité de Z (on pourra utiliser l'arbre pondéré de la question 1).

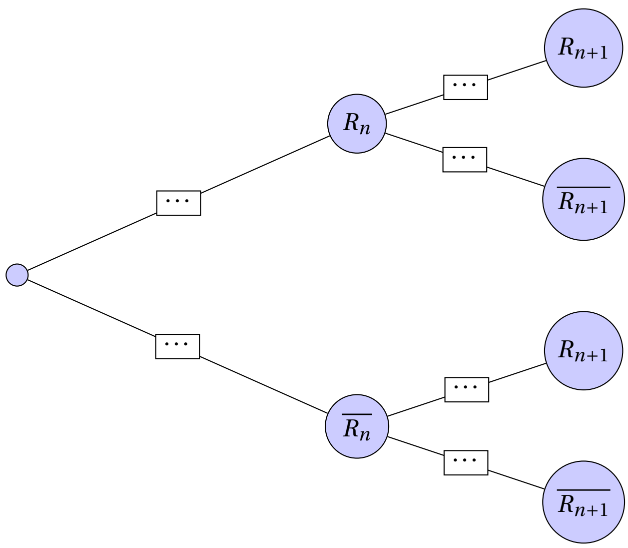
(b) Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(Z)$ de la variable aléatoire Z. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On s'intéresse maintenant au cas général. Pour tout entier naturel n non nul, on note x_n la probabilité de l'évènement R_n.

1,5 pt **1** (a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}})$.

(b) Recopier et compléter l'arbre ci-dessous.



(c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0,2x_n + 0,4$.

2 pts **2** Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = x_n - 0,5$.

(a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

(b) Déterminer l'expression de x_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (x_n).

(c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

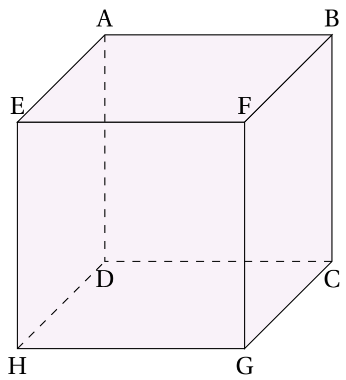
Exercice 3

6 points/20

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous tel que AB = 1. On note M le centre de la face BCGF.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{D}\,;\,\overrightarrow{\text{DH}},\,\overrightarrow{\text{DC}},\,\overrightarrow{\text{DA}}\right)$.

Soit N le point de coordonnées $\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.



1 pt **1** Donner sans justifier les coordonnées des points A,B, G, F et C.

1,75 pt **2** (a) Déterminer les coordonnées du milieu du segment [FC].

(b) En déduire les coordonnées de M.

(c) Montrer que N est le centre de la face EFGH.

(d) Calculer la longueur MN.

2,5 pts **3** (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).

(b) On considère la droite (δ) passant par N et parallèle à la droite (BG). Montrer qu'une représentation paramétrique de (δ) est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2s \\ y &=& \frac{1}{2} \\ z &=& \frac{1}{2}-2s \end{array}\right. \quad \text{où} \quad s \in \mathbb{R}$$

(c) Déterminer la position relative des droites (δ) et (AG).

0,75 pt **4** On considère le point R de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3};\,\frac{1}{3}\right)$. Les points R, F, H et C sont-ils coplanaires ?