Devoir commun numéro 1

Samedi 29 novembre 2025

Spécialité Mathématiques

Le sujet comporte 3 exercices répartis sur 3 pages.

Tous les calculs doivent être détaillés et toutes les réponses justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée **en mode examen**.

Durée de l'épreuve 3 h 30

Exercice 1

7 points/20

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B. Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A : Évolution de la population dans le milieu A

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0,93$.

Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

0,25 pt **1** Selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026, s'élèvera à 5 580 individus. En effet,

$$u_1 = u_0 \times 0,93 = 6 \times 0,93 = 5,58.$$

0,5 pt **2** (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $q = 0,93$. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$u_n = u_0 \times q^n = 6 \times 0,93^n.$$

0,5 pt **3** $-1 < 0,93 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,93^n = 0$. Dès lors, par produit de limites, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
En conséquence, selon ce modèle, la population animale est vouée à disparaitre, à long terme (dans quelques années).

Partie B : Évolution de la population dans le milieu B

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

0,5 pt **1** Selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026, s'élèvera à 4 800 individus. En effet,

$$v_1 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = 4,8.$$

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

0,75 pt (a) La fonction f est un polynôme du second degré, elle est donc dérivable sur $[0; +\infty[$. Ainsi,

$$f'(x) = -0,1x + 1,1.$$

Par ailleurs, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,1x + 1,1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1,1}{-0,1} = 11$.
La fonction f' est une fonction affine, son signe est celui de son coefficient directeur sur $[11; +\infty[$ et positif ailleurs.
On déduit alors le tableau de variation de f.

x	0		11		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	6.05	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, f est croissante sur l'intervalle $[0;11]$.

1 pt (b) Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $\mathcal{P}(n) : 2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

• **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a : $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$. Ainsi, $2 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 6$. Autrement dit, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que$P(n+1)$ est vérifiée.

Par hypothèse de récurrence, on a : $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.
Or, la fonction f est croissante sur $[0 ; 11]$, donc $f(2) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n) \leqslant f(6)$.
Par ailleurs, $f(2) = 2$, $f(6) = 4,8$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$, ainsi,

$$2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 4,8 < 6.$$

L'hérédité est alors vérifiée.

• **Conclusion :** Par principe de récurrence on déduit que, pour tout entier naturel n, on a bien $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

0,5 pt (c) D'après la question précédente, la suite (v_n) est décroissante et minorée par 2, elle est donc convergente selon le théorème de convergence monotone. Nommons ℓ cette limite.

0,5 pt (d) Résolvons l'équation $f(\ell) = \ell$.

$$\begin{aligned}
-0,05\ell^2 + 1,1\ell = \ell \quad &\Leftrightarrow \quad -0,05\ell^2 + 0,1\ell = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \ell(-0,05\ell + 0,1) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \ell = 0 \text{ ou } -0,05\ell + 0,1 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \ell = 0 \text{ ou } \ell = \frac{0,1}{0,05}\\
&\Leftrightarrow \quad \ell = 0 \text{ ou } \ell = 2.
\end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 2$, donc $\ell = 2$.

0,25 pt (e) Cela signifie qu'à long terme (dans un certain nombre d'années), la population animale se stabilisera aux alentours de 2 000 individus.

Partie C : Évolution de la population dans les deux milieux

0,5 pt **1**

(a) En utilisant la calculatrice, on obtient $n = 10$, autrement dit la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus à partir de 2035.

0,5 pt (b) En utilisant la calculatrice, on obtient $n = 6$, autrement dit la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus à partir de 2031.

0,25 pt (c) Le nombre initial d'individus dans les deux milieux A et B est le même, soit 6 000.
(u_n) étant une suite géométrique de raison inférieure strictement à 1 et de premier terme positif, elle est donc décroissante et tend vers 0.
Par ailleurs (v_n) est également décroissante mais tend vers 2.
Il existe fatalement un rang n_0 à partir duquel v_n sera toujours supérieure à u_n.

2 On considère le programme Python ci-après.

0,75 pt (a) Ci-après le programme complété.

```
n=0
u=6
v=6
while v<=u :
        u = 6*0,93**n
        v = -0,05*v**2+1,1*v
        n = n+1
print(2025 + n)
```

0,25 pt (b) En utilisant la calculatrice, on obtient $n = 13$. Le script affichera donc 2038.

Exercice 2

7 points/20

Au cours d'une séance, un joueur de volley-ball s'entraîne à faire des services. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,85.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à 0,6 ;
- si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant est égale à 0,6.

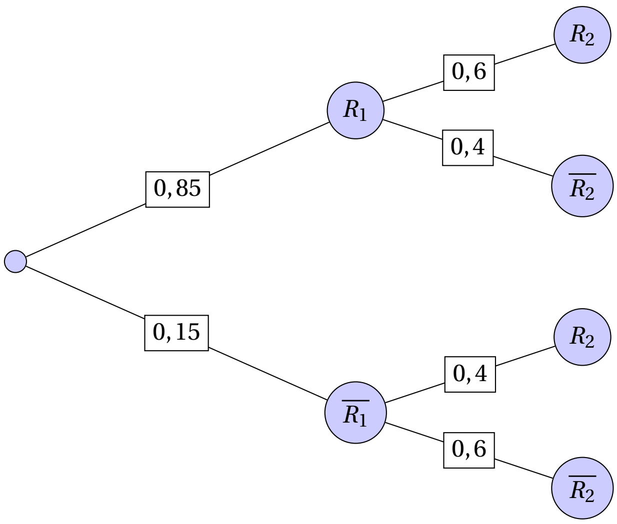
Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Partie A

On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

0,5 pt **1** Ci-après l'arbre pondéré représentant cette situation.



0,75 pt **2** Les deux événements R_1 et $\overline{R_1}$ constituent l'univers, car $R_1 \cup \overline{R_1} = \Omega$.
En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(R_2) &= P\left(R_2 \cap R_1\right) + P\left(R_2 \cap \overline{R_1}\right)\\
&= P\left(R_1\right) \times P_{R_1}\left(R_2\right) + P\left(\overline{R_1}\right) \times P_{\overline{R_1}}\left(R_2\right)\\
&= 0,85 \times 0,6 + 0,15 \times 0,4\\
&= 0,57.
\end{aligned}$$

0,75 pt **3** Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned}
P_{R_2}\left(\overline{R_1}\right) &= \frac{P\left(R_2 \cap \overline{R_1}\right)}{P(R_2)}\\
&= \frac{0,15 \times 0,4}{0,57}\\
&= \frac{2}{19}\\
&\approx 0,11.
\end{aligned}$$

4 Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de services réussis au cours des deux premiers services.

0,75 pt (a) 0, 1 et 2 sont les valeurs possibles de la varaible aléatoire Z. (0,75)
La loi de probabilité de Z est donnée par le tableau suivant :

z_i	0	1	2
$P(Z = z_i)$	$P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = 0,15 \times 0,6 = 0,09$	$P\left((\overline{R_1} \cap R_2) \cup (R_1 \cap (\overline{R_2})\right) = 1 - (0,09 + 0,51) = 0,4$	$P(R_1 \cap R_2) = 0,86 \times 0,6 = 0,51$

0,75 pt (b) L'espérance mathématique de Z : (0,5)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z) &= \sum_{i=0}^{2} z_i P(Z = z_i)\\
&= 0,09 \times 0 + 0,4 \times 1 + 0,51 \times 2\\
&= 1,42.
\end{aligned}$$

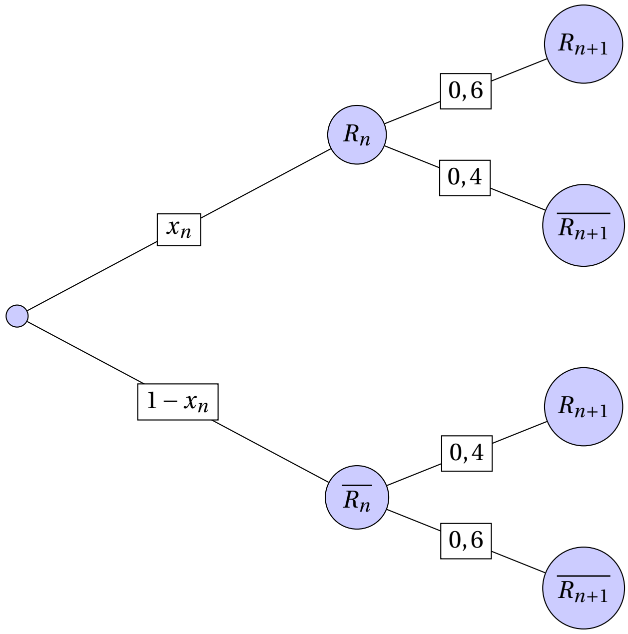
Cela signifie que le nombre moyen de services réussis sur les deux premiers services est égal à 1,42.

Partie B

On s'intéresse maintenant au cas général. Pour tout entier naturel n non nul, on note x_n la probabilité de l'évènement R_n.

0,5 pt **1** (a) On a : $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0,6$ et $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}}) = 0,6$. (0,25 pt)

0,5 pt (b) Ci-après l'arbre complété. (0,5 pt)



0,5 pt (c) Pour tout entier naturel non nul, les deux événements R_n et $\overline{R_n}$ constituent l'univers, car $R_n \cup \overline{R_n} = \Omega$. En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= P(R_{n+1})\\
&= P\big(R_{n+1} \cap R_n\big) + P\big(R_{n+1} \cap \overline{R_n}\big)\\
&= P\big(R_n\big) \times P_{R_n}\big(R_{n+1}\big) + P\big(\overline{R_n}\big) \times P_{\overline{R_n}}\big(R_{n+1}\big)\\
&= x_n \times 0,6 + (1 - x_n) \times 0,4\\
&= x_n \times 0,6 + 0,4 - 0,4x_n\\
&= 0,2x_n + 0,4.
\end{aligned}$$

2 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = x_n - 0,5$.

0,75 pt (a) Pour tout entier naturel non nul, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= x_{n+1} - 0,5\\
&= \big(0,2x_n + 0,4\big) - 0,5 && \text{d'après la relation de récurrence de } (x_n)\\
&= 0,2\big(u_n + 0,5\big) + 0,4 - 0,5\\
&= 0,2u_n + 0,2 \times 0,5 - 0,1\\
&= 0,2u_n + 0,1 - 0,1\\
&= 0,2u_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $0,2$ et de premier terme $u_1 = 0,85 - 0,5 = 0,35$.

1 pt (b) D'après la question précédente, on sait que : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,35 \times 0,2^{n-1}$.
On déduit alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 0,35 \times 0,2^{n-1} + 0,5$.
Par ailleurs, $-1 < 0,2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,2^n = 0$.
Dès lors, par produit et somme de limites, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0,5$.

0,25 pt (c) Cela signifie dans ce contexte, qu'à long terme (pour n suffisamment grand), le joueur réussira (à peu près) un service sur deux.

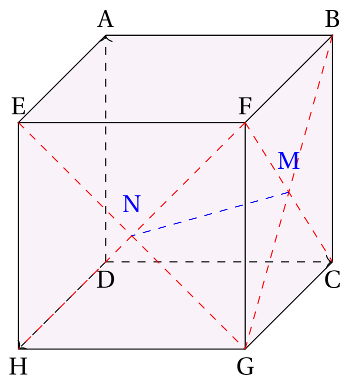
Exercice 3

6 points/20

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous tel que AB = 1. On note M le centre de la face BCGF.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{D}\,;\,\overrightarrow{\text{DH}},\,\overrightarrow{\text{DC}},\,\overrightarrow{\text{DA}}\right)$.

Soit N le point de coordonnées $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.



1 pt **1** Dans le repère orthonormé $\left(\text{D}\,;\,\overrightarrow{\text{DH}},\,\overrightarrow{\text{DC}},\,\overrightarrow{\text{DA}}\right)$, on peut lire les coordonnées suivantes :
$A(0;\ 0;\ 1)$, $B(0;\ 1;\ 1)$, $G(1;\ 1;\ 0)$, $F(1;\ 1;\ 1)$ et $C(0;\ 1;\ 0)$.

0,5 pt **2** (a) Les coordonnées du milieu du segment [FC] sont données par la formule :

$$\left(\frac{x_F + x_C}{2}; \frac{y_F + y_C}{2}; \frac{z_F + z_C}{2}\right) = \left(\frac{1+0}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{1+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right).$$

0,25 pt (b) Le point M est le centre du carré BCGF, autrement c'est le point d'intersection de ses deux diagonales $[FC]$ et $[BG]$.
Or, les diagonales d'un carré sont de même longueur et se coupent en leur milieu. Donc, M a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

0,5 pt (c) Le centre du carré EFGH est le point d'intersection de ses deux diagonales $[EG]$ et $[FH]$.
Or, les diagonales d'un carré sont de même longueur et se coupent en leur milieu. Ainsi, ce milieu a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_F + x_H}{2}; \frac{y_F + y_H}{2}; \frac{z_F + z_H}{2}\right) = \left(\frac{1+1}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{1+0}{2}\right) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

En conséquence, il s'agit bel et bien des coordonnées de N.

0,5 pt (d) Dans un repère orthonormé la longueur MN est donnée par :

$$\begin{aligned}
MN &= \sqrt{(x_N - x_M)^2 + \left(y_N - y_M\right)^2 + (z_N - z_M)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

0,5 pt **3** (a) **<u>1ère méthode :</u>**

On a : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \\ z_G - z_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AG}$ est un vecteur directeur de la droite (AG).
Une représentation paramétrique de la droite (AG) passant par le point $A(0;0;1)$ est ainsi donnée par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2ème méthode :
Soit $M(x;y;z)$ un point de la droite (AG).
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ z \\ z-1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AG).
$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est également un vecteur directeur de la droite (AG).
Les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, il existe alors un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$. Autrement dit,

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z - 1 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}.$$

0,75 pt (a) On considère la droite (δ) passant par N et parallèle à la droite (BG).
1ère méthode :
On a : $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} x_G - x_B \\ y_G - y_B \\ z_G - z_B \end{pmatrix} = \overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
$2\overrightarrow{BG}$ est un vecteur directeur de la droite (δ), car (δ) et (BG) sont parallèles.
Une représentation paramétrique de la droite (δ) passant par le point $N\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ est ainsi donnée par :

$$\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} - 2s \end{cases} \quad \text{avec} \quad s \in \mathbb{R}.$$

2ème méthode :
Soit $M(x;y;z)$ un point de la droite (δ).
$\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix} x-1 \\ z-\frac{1}{2} \\ z-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (δ).
$\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est également un vecteur directeur de la droite (δ).
Les deux vecteurs $\overrightarrow{NM}$ et $2\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires, il existe alors un réel s tel que $\overrightarrow{NM} = 2s\overrightarrow{BG}$. Autrement dit,

$$\begin{cases} x - 1 = 2s \\ y - \frac{1}{2} = 0s \\ z - \frac{1}{2} = -2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} - 2s \end{cases} \quad \text{avec} \quad s \in \mathbb{R}.$$

1,25 pt (b) $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AG).
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (δ).
Or, $\frac{2}{1} \neq \frac{0}{1}$ donc les deux vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires. En conséquence, (δ) et (AG) ne sont pas parallèles.

Pour savoir savoir si les deux droites (δ) et (AG) sont sécantes, il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} t = 1+2s \\ t = \dfrac{1}{2} \\ 1-t = \dfrac{1}{2}-2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1+2s & L_1 \\ t = \dfrac{1}{2} & L_2 \\ t = \dfrac{1}{2}+2s & L_3 \end{cases} \quad \text{avec} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

La combinaison linéaire $L_1 - L_3$ entraine que $0 = \dfrac{1}{2}$. Absurde! Ce système n'admet donc pas de solution. En conséquence, (δ) et (AG) ne sont pas sécantes.
Conclusion : Les deux droites (δ) et (AG) ne sont pas parallèles et elles ne sont pas sécantes, elles sont donc non coplanaires.

0,75 pt **4** On considère le point R de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.
Les points R, F, H et C sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que :

$$\overrightarrow{RF} = a\overrightarrow{RH} + b\overrightarrow{RC}. \ (S)$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{RF}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{RH}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RC}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Dès lors,

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{3} = \dfrac{a-2b}{3} & L_1 \\ \dfrac{1}{3} = \dfrac{-2a+b}{3} & L_2 \\ \dfrac{2}{3} = \dfrac{-a-b}{3} & L_3 \end{cases}.$$

La combinaison linéaire $L_1 + L_3$ entraine que $1 = -b$.
Et par substitution, dans l'équation de la ligne L_2, on obtient : $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a+2}{3}$, soit $a = -1$.
$(-1;-1)$ est ainsi une solution du système (S). On déduit alors que : $\overrightarrow{RF} = -\overrightarrow{RH} - \overrightarrow{RC}$, autrement dit que, les points R, F, H et C sont coplanaires.