



Suites numériques

Cours, méthodes, exemples et démonstrations

1 Rappels

Définition

On appelle **suite numérique** une fonction dont la variable est un entier naturel.
Pour ne pas les confondre avec fonctions à « variables réelles », la variable est mise en indice.
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite, alors n est l'**indice** du **terme général** u_n .
On peut définir une suite de deux manières :

- ▶ par une fonction (si on connaît l'expression du terme général en fonction de l'indice) ;
- ▶ par récurrence (si on calcule un terme en fonction du ou des termes précédents).

Exemples

1. Suite définie de **manière explicite** :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{n},$$

2. Suite définie de **manière récurrente** :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - 5. \end{cases}$$

1.1 Variation d'une suite

Définition

▶ On dira qu'une suite (u_n) est **strictement croissante** à partir de n_0 si :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} > u_n.$$

▶ On dira qu'une suite (u_n) est **strictement décroissante** à partir de n_0 si :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} < u_n.$$

▶ On dira qu'une suite (u_n) est **constante** à partir de n_0 si :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n.$$

Exemples

1. Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n+1}$. Quel que soit l'entier naturel n ,

.....
.....
.....



.....

2. Considérons la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} v_0 = 9 \\ v_{n+1} = v_n^2 + v_n + 3 \end{cases}.$$

.....

1.2 Suite arithmétique

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

où r est un nombre réel. r est alors appelé la **raison** de la suite.

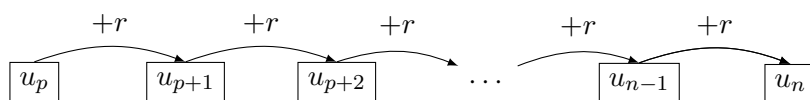
Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r , $p \geq 0$. Alors,

$$\forall n \geq p, \quad u_n = u_p + (n - p)r.$$

Démonstration

Le schéma suivant illustre la situation dans laquelle nous sommes :



On peut alors écrire :

$$u_n = u_{p+(n-p)}.$$

Pour passer de u_p à $u_{p+(n-p)}$, on ajoute $(n - p)$ fois r , d'où :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$



- Cas particulier, en prenant $p = 0$, on obtient :
- Cas particulier, en prenant $p = 1$, on obtient :



Exemple

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = u_n + 5 \quad \text{avec } u_0 = 30.$$

C'est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison 5. Ainsi,

.....

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r$$



nombre de termes dans la somme

Démonstration

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

ou encore :

$$\sum_{k=0}^n u_k = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Démonstration

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



1.3 Suite géométrique

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

où q est un nombre réel non nul. q est alors appelé la **raison** de la suite.

Exemple

Sophie a placé ses économies, à savoir 1 000 €, sur un livret qui lui rapporte 1,5% par an, c'est-à-dire que d'une année à l'autre, ses économies augmenteront de 1,5% du solde précédent. Si on note $u_0 = 1\,000$ et u_n le montant de son livret après n années, alors :

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1,5}{100}\right) = 1,015u_n.$$

(u_n) est alors une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1,015$.

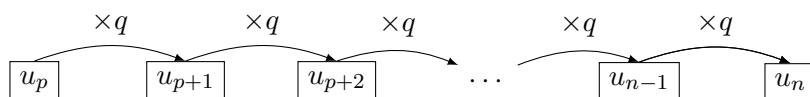
Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_p et de raison q , $q \geq 0$. Alors,

$$\forall n \geq p, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Démonstration

Le schéma suivant illustre cette situation.



On peut alors écrire :

$$u_n = u_{p+(n-p)}.$$

Pour passer de u_p à $u_{p+(n-p)}$, on multiplie par q , et ceci $(n-p)$ fois, On obtient alors :

$$u_n = u_p \times \underbrace{q \times q \times \cdots \times q}_{(n-p) \text{ facteurs}} = u_p \times q^{n-p}.$$



- Cas particulier, en prenant $p = 0$, on obtient :
- Cas particulier, en prenant $p = 1$, on obtient :



Propriété

Pour tout entier naturel n et réel $q \neq 1$, on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$. Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 Raisonnement par récurrence

Propriété

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n . Si :

- ▶ pour un entier n_0 , $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie (initialisation),
- ▶ pour tout entier naturel $k \geq n_0$, le fait que $\mathcal{P}_k$ soit vraie implique que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie (hérédité),

alors $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur à n_0 .

si $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$ alors on dira que la propriété est héréditaire.





3 Limite d'une suite

3.1 Définitions

Définition

On dit que la suite (u_n) tend vers un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit que (u_n) **converge** vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.



Autrement dit, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ si u_n se rapproche de plus en plus de ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Exemple

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers ... car plus n prend de grandes valeurs positives, plus $\frac{1}{n}$ se rapproche de
Pour n suffisamment grand $u_n \in]0; 0,01[$.

Définitions

► On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit que (u_n) diverge et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

► On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $] -\infty; -A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit que (u_n) diverge et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.



Autrement dit la limite de (u_n) est $+\infty$ si u_n prend des valeurs de plus en plus grandes.
Idem, la limite de (u_n) est $-\infty$ si la suite $(-u_n)$ tend vers $+\infty$.

Exemples

1. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$ car
.....
.....

2. La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -n^2$ tend vers $-\infty$
.....
.....

Définition

On dit que la suite (u_n) *diverge* quand elle ne converge pas.



Exemple

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \cos(n)$ diverge car ses valeurs varient entre -1 et 1 sans jamais se rapprocher d'une valeur fixe.

3.2 Des limites de référence

Propriété

Soit p un entier strictement positif.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty.$$

3.3 Limite et comparaison

3.3.1 Théorème de comparaison

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et soit n_0 un entier naturel.

- ▶ Si, pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq u_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- ▶ Si, pour $n \geq n_0$, $v_n \leq u_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Démonstration

Exemples

1. Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.

.....

2. Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_n \leq -n^2$. Alors,

.....

Propriétés

- ▶ Si $q < 0$ la suite (q^n) n'est ni croissante, ni décroissante.
- ▶ Si $q = 0$ la suite (q^n) est constante.



- ▶ Si $0 < q < 1$ la suite (q^n) est décroissante.
- ▶ Si $q = 1$ la suite (q^n) est constante.
- ▶ Si $q > 1$ la suite (q^n) est croissante.

Exemples

- ▶ La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$
- ▶ La suite (v_n) définie par $u_n = 3^n$
- ▶ La suite (w_n) définie par $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Propriété

Toute suite géométrique de raison q telle que $|q| < 1$ converge vers 0.

Exemples

1. Déterminer la limite de la suite géométrique (u_n) de raison 2 et de premier terme $u_0 = -4$.
.....
.....
.....
.....
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
.....
.....
.....
.....

3.3.2 Théorème des gendarmes

Théorème

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites, et ℓ est un réel. On suppose que :

- ▶ il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \leq u_n \leq w_n$;
- ▶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$.

Alors la suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Exemples

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$. (Convergence d'une suite monotone)
Déterminer la limite de la suite (u_n) .

.....
.....
.....



.....

3.4 Suite majorée ou minorée

Définition

- ▶ Une suite (u_n) est dite *majorée* s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- ▶ Une suite (u_n) est dite *minorée* s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.
- ▶ Une suite est dite *bornée* si elle est majorée et minorée.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

- ▶

- ▶

- ▶

3.5 Convergence d'une suite monotone

Théorème

- ▶ Toute suite croissante et majorée converge.
- ▶ Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
- ▶ Toute suite décroissante et minorée converge.
- ▶ Toute suite décroissante non majorée diverge vers $-\infty$.
- ▶ Toute suite monotone et bornée converge.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{n-1}{n+4}$.

1. Montrer que (u_n) est majorée par 1.

.....

2. Montrer que (u_n) est croissante.

.....



.....

3. En déduire que (u_n) converge.

.....

3.6 Opérations et limites

(u_n) et (v_n) sont deux suites, ℓ et ℓ' représentent des réels.

Dans les tableaux suivants, « F.I. » signifie : « Forme Indéterminée ». Ce sont des cas où l'on ne peut pas conclure immédiatement quant à la valeur de la limite. Dans de tels cas, il est nécessaire de transformer l'écriture.

3.6.1 Somme et produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
$\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
	$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

3.6.2 Quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right)$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell > 0$	0^+ (0 en restant positif) 0^- (0 en restant négatif)	$+\infty$ $-\infty$
$\ell < 0$	0^+ (0 en restant positif) 0^- (0 en restant négatif)	$-\infty$ $+\infty$
0	0	F.I.
ℓ	$+\infty$ $-\infty$	0 0
$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.



Les quatre formes indéterminées à retenir sont :

$\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$	$\langle \infty - \infty \rangle$
$\langle 0 \times \infty \rangle$	$\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$

