



Probabilité conditionnelle & Variable aléatoire

Cours, méthodes, exemples et démonstrations

1 Probabilités conditionnelles

Définition

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $p(A) \neq 0$. On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A** le nombre noté $p_A(B)$ défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors,

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A).$$

Démonstration

Elle découle de la définition : l'égalité des produits en croix mène à la propriété.

Exemple

Dans une urne, on place 10 boules, 3 noires et 7 rouges. On tire au hasard 2 boules, successivement et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ?

En notant :

▶ N_1 l'événement « la boule tirée est noire au 1^{er} tirage »,

▶ N_2 l'événement « la boule tirée est noire au 2^e tirage »,

la probabilité demandée est $p(N_1 \cap N_2)$.

▶ $p(N_1) = \dots$ car il y a 3 boules noires sur 10 lors du 1^{er} tirage ;

▶ $p_{N_1}(N_2) = \dots$ car il ne reste plus que 2 boules noires sur 9 au 2^e tirage si l'on sait que l'on a déjà tiré une boule noire au 1^{er} tirage.

Ainsi,
.....

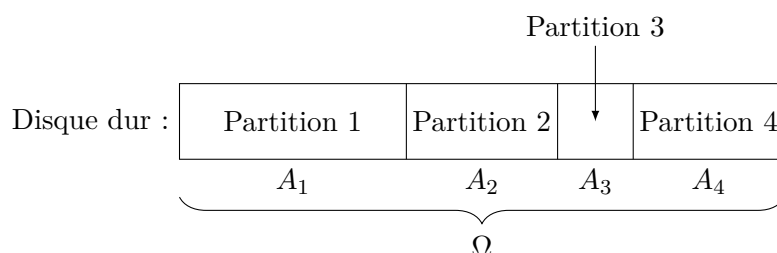
2 Formule de probabilités totales

2.1 Partition de l'univers

Définition

On dit que les n événements $A_1, \dots, A_n$ forment une **partition** de Ω si :

- ▶ tous les événements sont incompatibles deux à deux : $A_i \cap A_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$;
- ▶ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.



A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, quel que soit l'événement A.

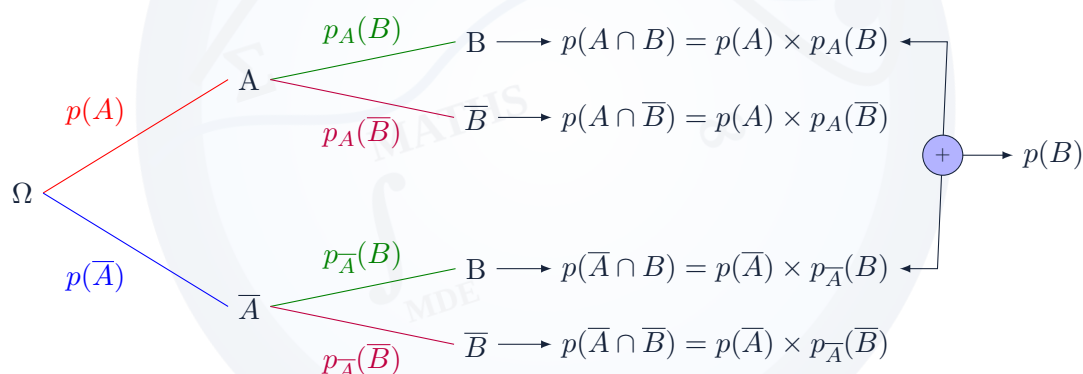
2.2 Version « simple » de la formule des probabilités totales

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors,

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B).$$

On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités :



Propriété

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n événements formant une partition de l'univers, avec $p(A_k) \neq 0$, $1 \leq k \leq n$. Alors, pour tout événement B,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B).$$

Démonstration

Exemple

Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines. Toutes les pièces sont vérifiées par le service qualité. Ce service a fourni le tableau suivant après une journée de



production.

N° de la machine utilisée	1	2	3
Pourcentage de pièces produites	50	35	15
Fréquence des défauts par machine	0,01	0,02	0,06

On prend au hasard une pièce produite dans la journée.

Déterminer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

On convient de noter :

► M_k l'événement : « La pièce provient de la machine n° k » ;

► D l'événement : « La pièce est défectueuse ».

D'après la formule des probabilités totales, on a :

.....

.....

.....

.....

.....

2.3 Événement contraire

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors,

$$p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B).$$

Démonstration

.....

.....

.....

.....

.....

3 Indépendance

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors,

$$p_B(A) = p(A) \iff p_A(B) = p(B).$$

Démonstration

.....

.....

.....

.....

.....

**Définition**

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
On dit que A et B sont **indépendants** quand $p_B(A) = p(A)$.

Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre.

Propriété

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Démonstration

.....
.....
.....

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On considère les événements :

▶ A : « Tirer un cœur » ;

▶ B : « Tirer un roi ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

On a :

▶ $p(A) = \frac{1}{4}$ car il y a 8 cœurs sur les 32 cartes en tout ;

▶ $p_B(A) = \frac{1}{4}$ car, sachant que la carte est un roi, il n'y a qu'une seule carte portant un cœur sur les 4 rois.

On a alors $p(A) = p_B(A)$, ce qui signifie que A et B sont indépendants.

Propriété

Soient A et B deux événements indépendants. Alors, A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration

On sait que :

$$P_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B).$$

Or, $p_A(B) = p(B)$ car les événements A et B sont indépendants.

D'où :

$$p_A(\overline{B}) = 1 - p(B) = p(\overline{B}),$$

ce qui signifie que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Deux événements A et B incompatibles tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ ne sont pas indépendants.
En effet, A et B incompatibles signifie d'une part que $p(A) \times p(B) \neq 0$, d'autre part que $p(A \cap B) = 0$.

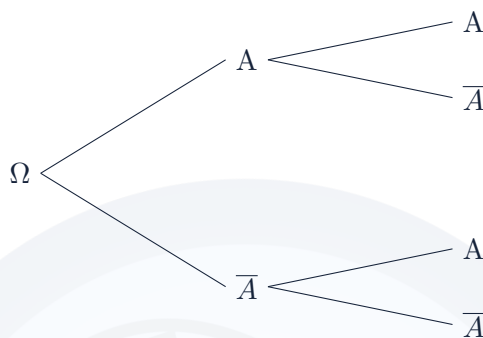


Ainsi, $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$; les événements ne sont donc pas indépendants.

4 Succession de deux épreuves indépendantes

Imaginons une expérience à 2 issues (A et $\bar{A}$ par exemple) que l'on répète deux fois de façon indépendante.

Alors, la situation peut se représenter par l'arbre suivant :



Ainsi,

- ▶ la probabilité d'obtenir deux fois l'événement A est $p(A)^2$;
- ▶ la probabilité d'obtenir une seule fois l'événement A est $p(A \cap \bar{A}) + p(\bar{A} \cap A) = 2p(A \cap \bar{A})$;
- ▶ la probabilité de ne pas obtenir l'événement A est $p(\bar{A})^2$.

Exemple

On lance un dé cubique équilibré deux fois de suite, en considérant que les lancers sont indépendants.

On pose A : « Obtenir un multiple de 3. » Ainsi, $p(A) = \frac{1}{3}$.

La probabilité d'obtenir un multiple de 3 une seule fois sur les deux lancers est :

$$2p(A \cap \bar{A}) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

5 Variables aléatoires

5.1 Une expérience aléatoire

Considérons une expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés cubiques non pipés (non truqués) et regardons la somme des faces obtenues.

Notons S la somme des deux dés. Alors, les valeurs possibles de S sont dans l'ensemble :

$$\{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}.$$

On dit ici que S est une *variable aléatoire* car sa valeur varie (d'où le mot « variable ») et ce, de façon aléatoire (car sa valeur dépend des issues obtenues dans l'expérience aléatoire).

Par abus de langage, et pour simplifier la notion, on écrira :

$$S = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}.$$

Voici les différentes possibilités que nous avons :



						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

Définition

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire dont les issues possibles sont des nombres (lancers de dés, nombres de stylos dans une trousse,...).

On appelle **variable aléatoire** l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les issues de $\mathcal{E}$.

Exemples

1. L'univers étant une classe donnée, l'expérience consiste à regarder le nombre de stylos dans une trousse d'un élève. On constate que le nombre de stylos varie entre 5 et 10. Alors, la variable aléatoire représentant ce nombre est :

$$X = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

2. L'univers étant un lycée donné, l'expérience consiste à regarder dans chaque classe le nombre d'élèves mesurant plus de 2 mètres. On constate que ce nombre varie entre 0 et 5. Alors, la variable aléatoire représentant le nombre d'élèves de ce lycée mesurant plus de 2 mètres est :

$$X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

6 Loi de probabilité**Définition**

Soit X une variable aléatoire discrète.

La **loi de probabilité** de X est la donnée de la probabilité de toutes les valeurs que peut prendre X .

En général, elle est donnée sous forme de tableau.

Exemple

Reprenons l'exemple du lancer de deux dés cubiques non pipés, où S est la variable aléatoire représentant la somme obtenue.

D'après le tableau obtenu précédemment, on peut écrire :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$



7 Espérance d'une variable aléatoire

On appelle **espérance mathématique** de X le nombre défini par :

Le calcul de l'espérance mathématique ressemble à celui de la moyenne d'une série statistique. L'espérance peut alors être considérée comme la « valeur moyenne » de la variable aléatoire si on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Reprenons l'exemple précédent. On a alors,

Cela signifie que sur un grand nombre de lancers, on peut espérer obtenir en moyenne une somme égale à 7.

Soit X une variable aléatoire discrète. Soient a et b deux réels. Alors,

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Par définition, $aX + b = \{ax_i + b\}_{1 \leq i \leq n}$. Ainsi,



8 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition

Soit $X = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une variable aléatoire discrète.

► On appelle **variance mathématique** de X le nombre défini par :

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 \times p(X = x_i) .$$

► On appelle **écart-type** de X le nombre défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent. Ajoutons une ligne à la loi de probabilité de S :

$S = s_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S - E(S)$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$p(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned} V(S) &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \frac{35}{6} \\ &\approx 5,83. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,4.$$

8.1 Interprétation

Dans la formule $V(X) = E(X - E(X))^2$, si on élève au carré la variable $X - E(X)$, c'est pour manipuler une variable positive. Cette nouvelle variable représente alors le carré de la différence entre X et son espérance.

Ainsi, la variable est l'espérance de ce carré; on peut donc l'interpréter comme la moyenne des carrés des différences entre X et $E(X)$.

En prenant la racine carrée de la variance pour calculer l'écart-type, on se ramène à la moyenne des différences (en valeur absolue). Ainsi, l'écart-type représente l'écart moyen de chaque valeur de X à son espérance.

En obtenant $E(S) = 7$ et $\sigma(S) \approx 2,4$, on peut conclure que sur un grand nombre de lancers, on peut espérer en moyenne avoir une somme égale à 7 plus ou moins 2,4, soit une somme comprise entre 4,6 et 9,4.

8.2 Théorème de König-Huygens

Théorème

Soit $X = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une variable aléatoire discrète. Alors,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Démonstration

Dans la pratique, ce théorème nous permet de calculer la variance de façon peut-être plus simple dans certains cas.

Exemple

Reprenons l'exemple du lancer de deux dés cubiques non pipés.

Ajoutons une ligne à la loi de probabilité de S :

$S = s_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S^2 = s_i^2$	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$p(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned} E(S^2) &= 4 \times \frac{1}{36} + 9 \times \frac{1}{18} + 16 \times \frac{1}{2} + \cdots + 144 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{329}{6}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème de König-Huygens,

$$\begin{aligned} V(S) &= \frac{329}{6} - 7^2 \\ &= \frac{35}{6} \\ &\approx 5,83 \end{aligned}$$

et donc :

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,4.$$



9 Somme de variables aléatoires

Propriété

On considère X et Y deux variables aléatoires réelles associées à une même expérience sur un univers fini. Soient de plus a et b deux réels, on a :

- ▶ pour l'espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- ▶ pour la variance : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ seulement si X et Y sont indépendantes.

Exemple

On considère une variable aléatoire X qui prend ses valeurs dans $\{-3; 1; 15; 30\}$ et telle que : $E(X) = 8$ et $V(X) = 3$. On construit la variable aléatoire $Y = -3X + 5$.

1. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

.....

2. Déterminer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

.....
.....
.....

3. Donner $E(X + Y)$.

.....