



Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

Cours, méthodes, exemples et démonstrations

1 Succession d'épreuves indépendantes

1.1 Épreuve de Bernoulli

Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire où seules 2 issues sont possibles : le *succès* (S) et l'*échec* ($\bar{S}$).

$$\Omega \begin{cases} S \rightarrow \text{Succès} \\ \bar{S} \rightarrow \text{Échec} \end{cases}$$

Exemples

1. Sur une chaîne de production de smartphones, on en choisit un au hasard. L'épreuve consistant à regarder s'il est défectueux est une épreuve de Bernoulli : il est défectueux (S) ou non défectueux ($\bar{S}$).
2. Dans un trousse, on choisit au hasard un stylo. L'épreuve consistant à regarder s'il est rouge est une épreuve de Bernoulli : soit il l'est (S), soit il ne l'est pas ($\bar{S}$).

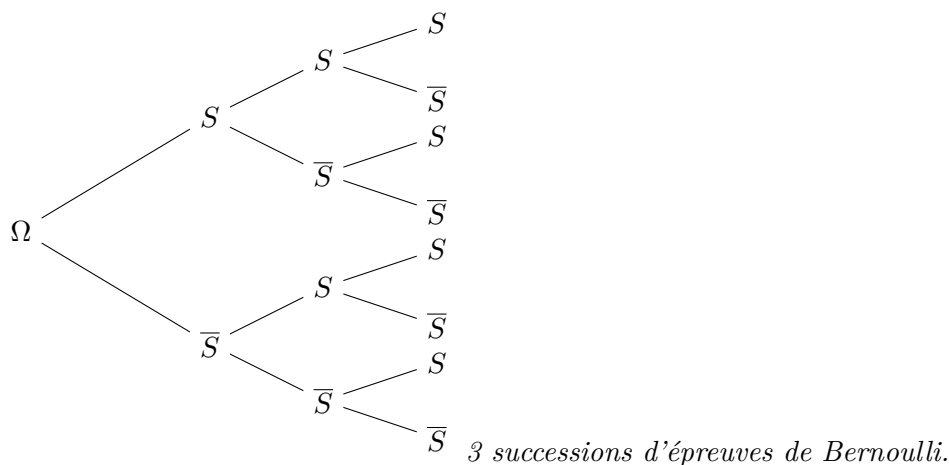
1.2 Schéma de Bernoulli

Définition

On répète n fois une même épreuve de Bernoulli dans les mêmes conditions (on dit : *de façon indépendante*). Cette succession d'épreuves est appelée un **schéma de Bernoulli**.

Exemple

On représente un schéma de Bernoulli de la manière suivante :





1.3 Loi de Bernoulli

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli dont le succès est de probabilité p .

On note X la variable aléatoire représentant l'issue de cette épreuve : $X(\Omega) = \{S; \bar{S}\}$.

La loi de probabilité de X est appelée *loi de Bernoulli* de paramètre p et est donnée par le tableau suivant :

$X = k$	S	$\bar{S}$
$P(X = k)$	$1 - p$	p

L'épreuve de Bernoulli et la loi de Bernoulli tirent leur nom du mathématicien Jacques Bernoulli (1654 – 1705).

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p , on a :

- l'espérance : $E(X) = p$;
- la variance : $V(X) = p(1 - p)$;
- l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

Démonstration

- $E(X) = \sum_{i=1}^2 x_i P(X = x_i) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$;
-

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X - E(X))^2 \\
 &= \sum_{i=1}^2 (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i) \\
 &= (0 - p)^2(1 - p) + (1 - p)^2 p \\
 &= (1 - p)[p^2 + (1 - p)p] \\
 &= p(1 - p)
 \end{aligned}$$

- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1 - p)}$.

2 Loi Binomiale

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p . On répète n fois de façon indépendante cette épreuve, et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de succès à l'issue de cette succession d'épreuves.

On dit que la loi de probabilité de X est la **loi binomiale** de paramètres n et p , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.



À l'issue de ces n épreuves, X peut valoir $0, 1, 2, \dots$ jusqu'à n :

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n-1; n\}.$$

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle « factorielle » de n le nombre $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k$.
Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple

$1! = \dots$ $2! = \dots$ $3! = \dots$ $4! = \dots$ $5! = \dots$ $6! = 720$ $7! = 5\,040$
 $8! = 40\,320$.

Propriété

$n!$ est le nombre de **permutations** d'un ensemble contenant n éléments.

Exemples

► **Cas $n = 3$** : Il y a $3! = 6$ permutations possibles de 3 éléments.

.....

► **Cas $n = 4$** : Il y a $4! = 24$ permutations possibles de 4 éléments.

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

► $\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \dots$

► $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} = \dots$

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{0, 1, \dots, n\}$. On désigne par *coefficient binomial* « k parmi n » le nombre :

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et } n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n.$$

Il désigne par exemple le nombre de sous-ensembles à k éléments pris parmi n éléments distincts.

Exemples

► $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins dans l'arbre binaire représentatif d'un schéma de n épreuves de Bernoulli conduisant à p succès.



- $\binom{n}{k}$ est le nombre de prélèvements simultanés (sans remise) de p objets parmi n .

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n; p)$. Pour tout entier k compris entre 0 et n , on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Démonstration

Sur un schéma de Bernoulli associé à une variable aléatoire X , chaque chemin est composé de n branches. Chaque branche représente un succès ou bien un échec.

Parmi les n branches, il y a donc k succès et $(n - k)$ échecs, avec $0 \leq k \leq n$.

Sur un chemin, la probabilité d'obtenir k succès et $n - k$ échecs est alors égale à $p^k (1 - p)^{n-k}$.

Par ailleurs, le nombre de chemins dans un schéma de n épreuves de Bernoulli conduisant à p succès est égal à $\binom{n}{k}$.

On déduit alors la probabilité d'obtenir k succès : $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Exemple

On lance trois fois successivement une pièce de monnaie non équilibrée dont la probabilité de tomber sur PILE est 0,4 et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de PILE obtenus.

- En considérant que « tomber sur PILE » est un succès, X donne le nombre de succès lorsque l'on répète $n = 3$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli dont la probabilité d'un succès est $p = 0,4$, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$, notée plus simplement $\mathcal{B}(3; 0,4)$.
- On peut déterminer les probabilités associées à X à l'aide d'un arbre pondéré. La probabilité d'obtenir 2 PILE est

.....

- On obtient le même résultat en utilisant la formule de la loi binomiale :

.....

Propriétés

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Nous avons alors,

- son espérance mathématique est : $E(X) = n \times p$;
- sa variance mathématique est : $V(X) = n \times p \times (1 - p)$;
- son écart-type est : $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1 - p)}$.

**Exemple**

Dans une urne, il y a 7 boules bleues et 3 rouges.

On choisit au hasard une boule de cette urne puis on la remet, et on répète cette expérience 10 fois de façon indépendante.

La probabilité de choisir une boule bleue lors d'un tirage est $p = 0,7$.

Si X représente le nombre de boules bleues obtenues à l'issue de ces 10 tirages au sort, alors X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$ dont l'espérance et la variance sont :

$$E(X) = 10 \times 0,7 = 7.$$

$$V(X) = 10 \times 0,7 \times (1 - 0,7) = 2,1.$$

Propriété

Le diagramme en barres associé à une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètre n et p est en forme de cloche, approximativement centré sur son espérance $E(X)$.

Exemple

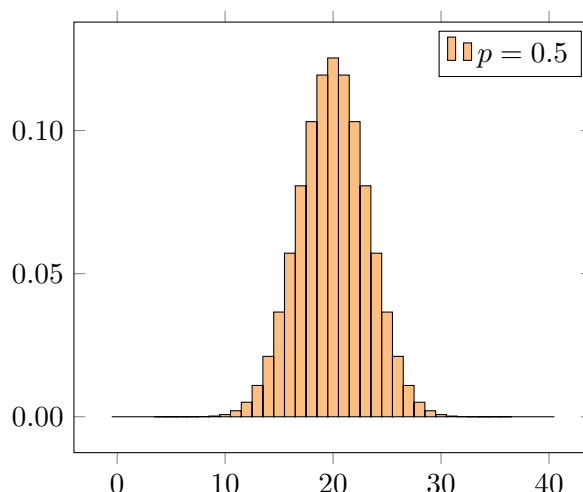
Le diagramme en barres associé à la loi $\mathcal{B}(40; 0,5)$, sur lequel k varie de 0 à 40 en abscisses, montre, pour chaque valeur de k , la hauteur de la barre correspondant à $p(X = k)$.

Pour $k = 15$, la hauteur de la barre est

$$p(X = 15) \approx 0,036.$$

Le diagramme est en forme de cloche et approximativement centré sur 20, soit l'espérance de cette loi.

Ce diagramme est quasiment symétrique par rapport à la droite d'équation $x = E(X) = 20$.



3 Intervalle de fluctuation

Définition

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p .

Un intervalle $[a; b]$ tel que $p(a \leq X \leq b) \geq 1 - \alpha$ est appelé intervalle de fluctuation au seuil de $1 - \alpha$, associé à X avec $\alpha \in]0; 1[$ et a et b deux réels.

Exemple

Pour X suivant la loi $\mathcal{B}(40; 0,5)$ et $\alpha = 0,05$, on a $p(X \leq 15) \approx 0,959 \geq 0,95$ donc $[0; 15]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de $1 - \alpha = 0,95$ associé à X : on est sûr à au moins 95 % qu'il n'y aura pas plus de 15 succès sur les 40 répétitions.

**Propriété**

Soit X , une variable aléatoire suivant une loi binomiale, $\alpha \in]0; 1[$ et a et b réels.

Si $p(X < a) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $p(X > b) \leq \frac{\alpha}{2}$ alors l'intervalle $[a; b]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 1α associé à X .

Dans ce cas, on dit que c'est un intervalle de fluctuation centré (ou bilatéral).

Exemple

Pour X suivant la loi $\mathcal{B}(43; 0,2)$ et $\alpha = 0,05$, on a :

- $\frac{\alpha}{2} = 0,025$;
- $p(X < 4) \approx 0,018$ et $0,018 < 0,025$;
- $p(X > 14) \approx 0,016$ et $0,016 < 0,025$.

Ainsi, nous sommes sûr à au moins 95 % d'avoir entre 4 et 14 succès sur les 43 répétitions.



Dans la pratique, les calculatrices permettent de donner une valeur approchée de $P(X = k)$ très facilement.

Par exemple, sur la Numworks, pour une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(30, 12)$.

rad APPLICATIONS



Calculs



Fonctions



Python



Statistiques



Probabilités



Solveur

rad PROBABILITES



Probabilités

Lois de probabilité
discrètes et continues



Tests

Tests statistiques



Intervalles

Intervalles de confiance

rad PROBABILITES
Lois de probabilité



Binomiale



Uniforme



Exponentielle



Normale



Chi2

rad PROBABILITES
Binomiale

Choisir les paramètres

n

30

Nombre de répétitions

p

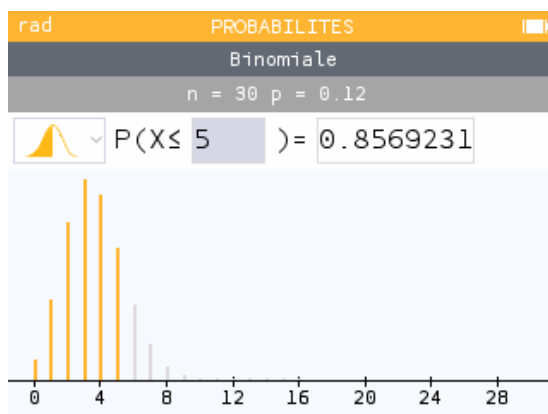
0.12

Probabilité de succès

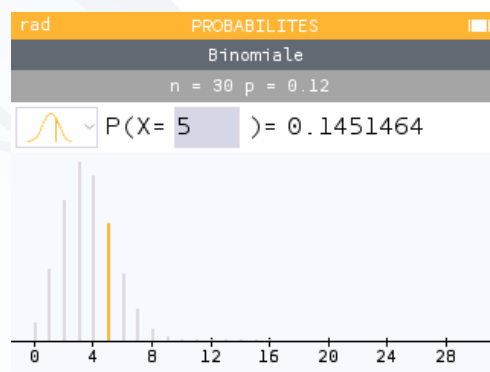
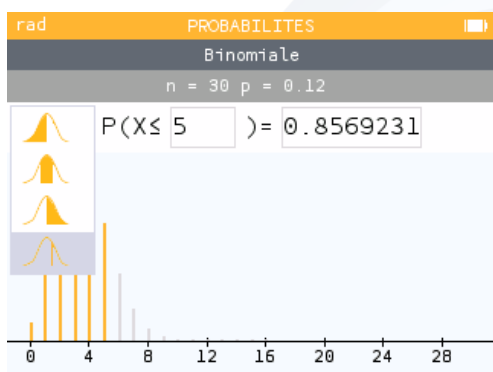
Suivant



- En cliquant sur « Suivant », on peut calculer par exemple $P(X \leq 5)$:



- En déplaçant le curseur vers la gauche et en cliquant sur l'icône, puis en descendant tout en bas, on peut calculer par exemple $P(X = 5)$:



- En sélectionnant, parmi les choix proposés en cliquant sur l'icône à gauche, le deuxième en partant du haut, on peut calculer par exemple $P(3 \leq X \leq 6)$:

