



Logarithme népérien

Cours, méthodes, exemples et démonstrations

1 Définition et résolution d'équations

Définition

On définit la fonction *logarithme népérien* comme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle, autrement dit l'unique fonction :

$$\begin{aligned}\ln : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln x\end{aligned}$$

pour laquelle,

$$\forall x > 0, e^{\ln x} = \ln(e^x) = x.$$

Propriété

Soient $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$y = e^x \iff x = \ln y.$$



On en déduit notamment que : $\ln 1 = \dots$ et $\ln(e) = \dots$.

Exemple

$$e^x = 7 \iff x = \dots\dots\dots$$

2 Variation de la fonction $\ln$

Propriété

La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

De la dérivée du logarithme népérien, on peut en déduire la propriété suivante.

Propriété

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante et concave $\mathbb{R}_+^*$.

3 Conservation de l'ordre

Propriété

Pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\ln x = \ln y \iff x = y \quad \text{et} \quad \ln x < \ln y \iff x < y.$$



Exemples

1. $\ln(x^2 + 7) = \ln(2x^2 + 3)$

.....

.....

.....

.....

.....

2. $\ln(x^2 + 10) > \ln(2x^2 + 1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

Dans la résolution d'équations ou d'inéquations avec des logarithmes, il faut toujours s'assurer que les opérandes soient strictement positives. Dans notre premier exemple, $x^2 + 7 > 0$ et $2x^2 + 3 > 0$ pour tout réel x ; on peut ainsi résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour l'inéquation.

4 Relations fonctionnelles

Propriété

Pour tous réels x et y strictement positifs, pour tout entier relatif n :

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$;
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$;
- $\ln(x^n) = n \ln x$.



Faire preuve de rigueur lors de l'utilisation de la relation fonctionnelle : ne pas scinder $\ln(xy)$ en somme de deux logarithmes sans avoir vérifié et mentionné la stricte positivité de x et y .

5 Limites du logarithme népérien

Propriété

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$



L'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe représentative de la fonction logarithme.



6 Croissances comparées

Théorème

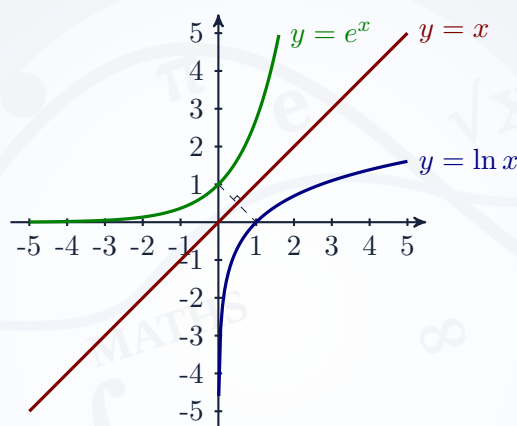
Pour tout entier naturel n , on a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0.$

On dit qu'en cas d'indétermination, les puissances de x « l'emportent » sur $\ln x$.

7 Représentation graphique

De la stricte croissante de la fonction $\ln$, de sa concavité, de ses limites et des valeurs remarquables du logarithme népérien, on déduit sa représentation graphique dans un repère orthonormé :



Du fait que les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont réciproques, on déduit que, dans un repère orthonormé, leur courbe représentative sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

8 Dérivée de $\ln(u)$

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable à valeurs strictement positives sur un intervalle I . Ainsi, sur I :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}.$$

Exemple

Soit $f(x) = \ln(e^x + 1)$.

.....

