



Limites & Continuité d'une fonction

Cours, méthodes, exemples et démonstrations

1 Limites

1.1 Limite aux infinis

1.1.1 Limite infinie

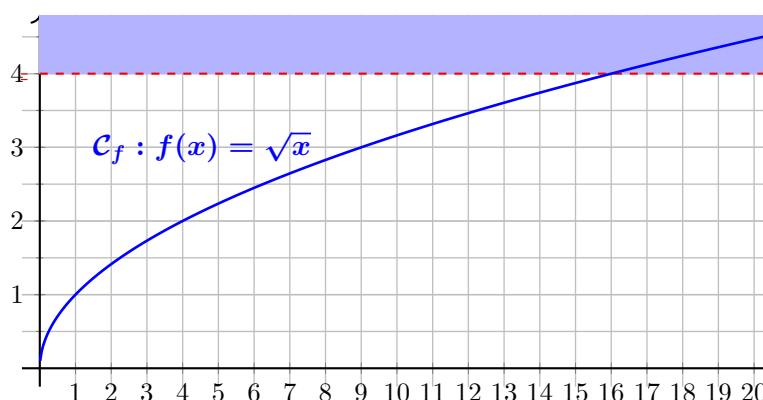
Définition

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un réel m tel que si $x > m$ alors $f(x) > A$.

Exemple

Soit f la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}^+$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.1.2 Limite finie en l'infini

Définition

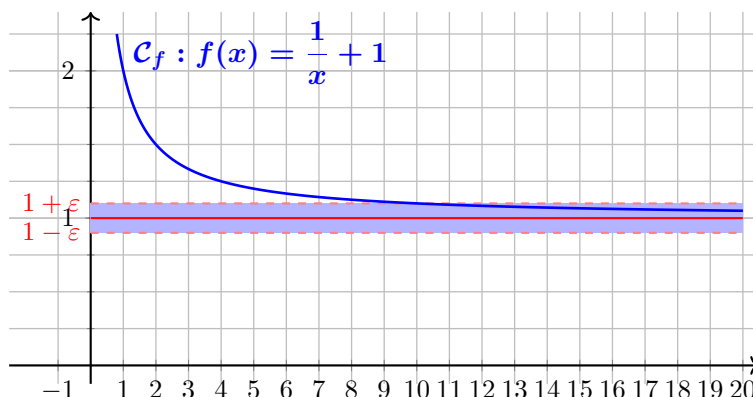
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , il existe un réel m tel que si $x > m$ alors $f(x) \in I$.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + 1$.



.....

Pour faire simple !

La limite d'une fonction f en $-\infty$ (resp. $+\infty$) est la valeur (si elle existe) vers laquelle se rapproche $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).

On la note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$).

Cette limite, quand elle existe, peut être un nombre réel ou un infini.

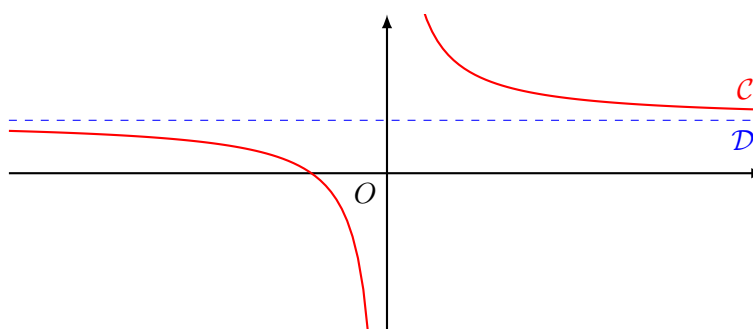
Exemples

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ car
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ car

Définition

Soit a un réel. Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$) alors la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f se rapproche de la droite d'équation $y = a$ en $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = a$ est une **asymptote horizontale** de $\mathcal{C}$.





Ici, $\mathcal{D}$ est une asymptote horizontale de $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

1.2 Limite en un point

1.2.1 Limite infinie

Définition

Soit D_f le domaine de définition de f . On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que si $x \in I \cap D_f$ alors $f(x) > A$.

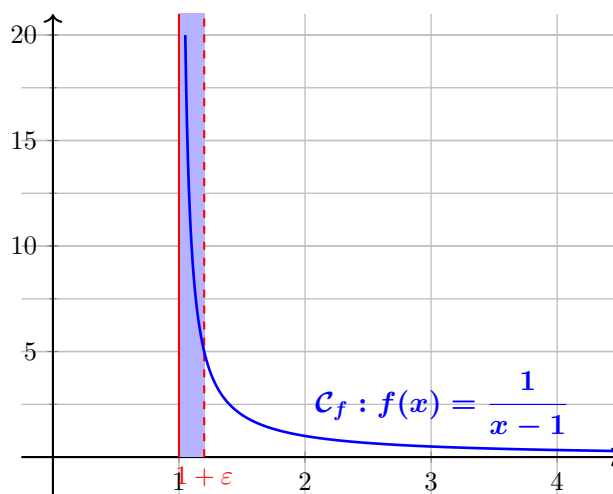
Pour faire simple !

La limite d'une fonction f en a est la valeur vers laquelle $f(x)$ se rapproche quand x se rapproche de a . On la note $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

.....



Il se peut que, lorsque x se rapproche de a tout en lui étant inférieur, la limite soit différente du cas où x se rapproche de a en lui étant supérieur. On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x).$$



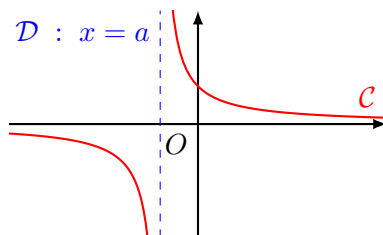
Exemple

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = \dots\dots\dots \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = \dots\dots\dots$$

Définition

Soit a un réel. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) alors la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f se rapproche de la droite d'équation $x = a$.

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de $\mathcal{C}$.



Ici, $\mathcal{D}$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}$ en a .

1.3 Limites des fonctions usuelles

Propriété

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{pour } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{pour } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$.

Exemples

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \dots\dots\dots$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = \dots\dots\dots$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^3} = \dots\dots\dots$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^5} = \dots\dots\dots$.

1.4 Opérations sur les limites

Propriétés

On note ℓ la limite de la fonction f et ℓ' la limite de la fonction g .



• Limite d'une somme

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f + g)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.

• Limite d'un produit

$\lim f$	$\lim g$	$\lim fg$
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell \neq 0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	F.I.

• Limite d'un quotient

$\lim f$	$\lim g$	$\lim \frac{f}{g}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	ℓ/ℓ'
$\ell \neq 0$	0	∞
ℓ	∞	0
0	0	F.I.
∞	∞	F.I.

Exemples

- On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + e^x$.

.....

.....

- On considère la fonction g définie par $g(x) = -xe^x$.

.....

.....

1.5 Théorème de comparaison

Théorème

On considère deux fonctions f et g . Soit a une valeur ou une borne (finie ou infinie) de $D_f \cap D_g$.

- Si $\lim_{x \rightarrow +a} f(x) = +\infty$ et s'il existe un réel A tel que, pour $x \geq A$, $f(x) \leq g(x)$, alors
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +a} f(x) = -\infty$ et s'il existe un réel A tel que, pour $x \geq A$, $f(x) \geq g(x)$, alors
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2\cos(x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété

Pour tout entier naturel n , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$.

Démonstration

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

1.6 Théorème des gendarmes

Théorème

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si, pour tout réel ℓ , on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow +a} h(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

.....

.....

.....

.....

1.7 Limites et fonction composée

Propriété

Soient u et v deux fonctions. On définit la fonction f par $f(x) = u[v(x)]$. Alors,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{X \rightarrow y} u(X) \quad \text{où } y = \lim_{x \rightarrow \alpha} v(x),$$

α pouvant représenter un nombre fini ou un infini.



On peut aussi noter :

$$f(x) = u[v(x)] = (u \circ v)(x)$$

(lire « u rond v »). On dit que f est une *fonction composée*.

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2 Continuité

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$.

On dit que f est *continue* en a si :

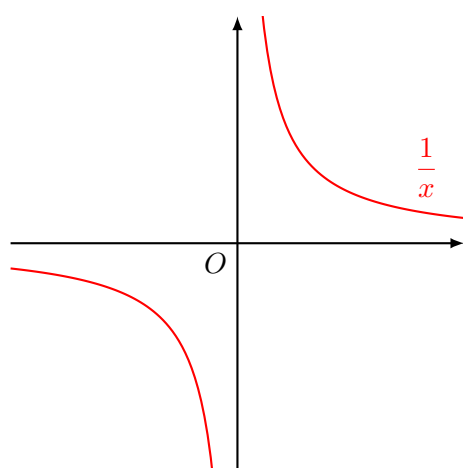
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout point de I .

Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe représentative d'une fonction continue sur I peut se tracer sans lever le crayon sur cet intervalle.

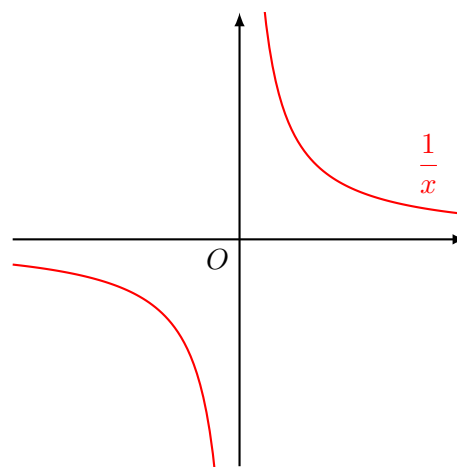
Exemples

La courbe représentative de la fonction inverse n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (car ses limites en 0 sont infinies). En revanche, elle l'est sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.



$I = \mathbb{R}$

Il y a un « trou » au niveau de $x = 0$
donc la fonction n'est pas continue en 0,
donc pas continue sur $\mathbb{R}$.



$I_1 =] -\infty ; 0[$ $I_2 =]0 ; +\infty[$

Il n'y a pas de trou sur chaque intervalle
 I_1 et I_2 donc la fonction est continue sur
 I_1 et sur I_2 .



- ▶ Dans le second cas, on ne dit pas que la fonction est continue sur $I_1 \cup I_2$, mais *continue sur chacun des intervalles*.
- ▶ Quand une fonction n'est pas continue, on ne dit pas qu'elle est *discontinue*.

Définition

On appelle *point de discontinuité* tout point en lequel une fonction n'est pas continue.

Exemple

$x = 0$ est un point de discontinuité de la fonction inverse.



2.1 Fonctions continues de référence

Propriétés

- Les fonctions *polynômes* sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions *rationnelles* sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- La fonction *racine carrée* est continue sur $[0 ; +\infty[$.
- La fonction *exponentielle* est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions obtenues par somme, produit ou quotient de fonctions continues sont continues sur chacun des intervalles où elles sont définies.

Exemple

1. La fonction $x \mapsto x^3 + 2x - 5$ est continue sur $\mathbb{R}$
2. La fonction $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
3. La fonction $x \mapsto (x^2 + 1) \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
4. La fonction $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ est continue sur $] -\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$

2.2 Continuité d'une fonction composée

Propriété

Soit $f = v \circ u$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si u est continue sur I et si v est continue sur $u(I)$ alors f est continue sur I .

Exemple

Soient $u : x \mapsto x - 1$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$. Notons $f(x) = (v \circ u)(x) = \sqrt{x - 1}$.

.....
.....
.....
.....
.....

2.3 Continuité et tableau de variations



Dans un tableau de variations, un point de discontinuité est représenté par une double barres verticales. Par exemple, pour la fonction inverse, on a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow$	$+\infty \searrow$	0
		$-\infty$	



2.4 Fonction définie et fonction continue



Une fonction peut être définie sur un intervalle I sans nécessairement être continue sur I .

Exemple

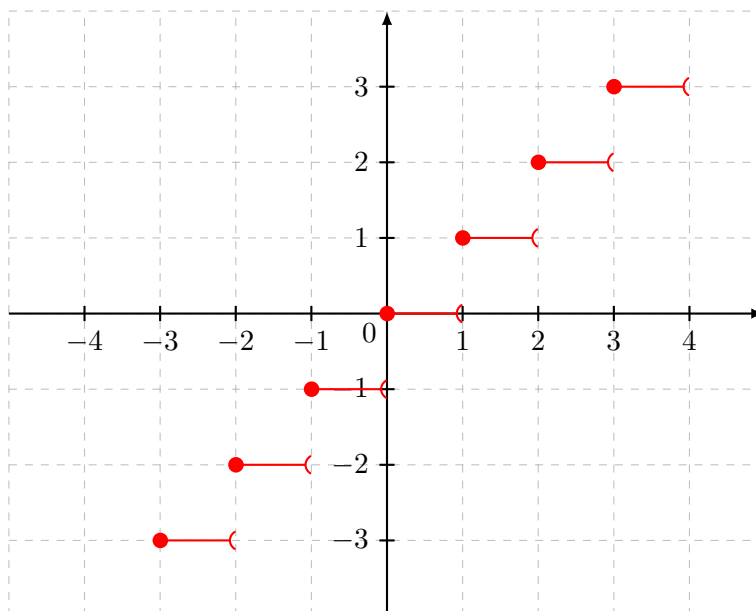
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = E(x) = \lfloor x \rfloor.$$

Cette fonction est appelée *fonction partie entière* : pour tout entier relatif n ,

$$\forall x \in [n ; n + 1[, \quad f(x) = n.$$

Sa représentation graphique est la suivante :



Cette fonction est définie en tout point de $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

2.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , et soient a et b deux réels de I . Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b .



Ce théorème assure, sous certaines hypothèses, l'existence d'*au moins un* antécédent à k , mais il n'assure pas son unicité et ne permet pas de calculer sa valeur.

**Corollaire**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Si f est continue et strictement monotone sur $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a ; b]$.

Exemples

- Soit $f(x) = \cos x - x$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

- L'équation $x^3 = 243$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$

.....
.....
.....

2.6 Théorème du point fixe**Théorème**

Soit une suite (u_n) définie par un premier terme et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ . Si la fonction associée f est continue en ℓ , alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....