



Orthogonalité & Distances dans l'espace

Cours, méthodes, exemples et démonstrations

1 Produit scalaire



Le produit scalaire a été défini en classe de 1^{re} dans le plan. Sa définition reste inchangée dans l'espace.

Définition

Soient $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ deux vecteurs de l'espace. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) . Le produit scalaire des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, noté $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, est défini par :

- ▶ $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle aigu ;
- ▶ $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle obtus.



Les propriétés sur le produit scalaire dans l'espace sont les mêmes que celles dans le plan.

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace :

- ▶ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$;
- ▶ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (propriété de symétrie) ;
- ▶ $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
- ▶ $\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda \vec{u}) \cdot (\mu \vec{v}) = \lambda \mu (\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- ▶ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$;
- ▶ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$;
- ▶ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.



Les propriétés faisant intervenir les coordonnées change afin d'intégrer la troisième composante.

Propriétés

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, c'est-à-dire où $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$, on considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.



Exemple

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$. On a alors, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

1.1 Orthogonalité de deux vecteurs

Définition

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemple

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \dots\dots\dots$

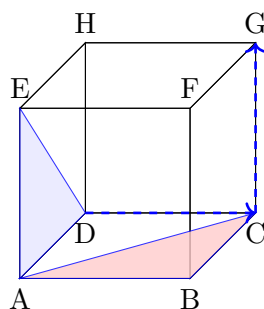
1.2 Orthogonalité d'un vecteur et d'un plan

Définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et soit $\vec{n}$ un vecteur de l'espace.
On dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à $\mathcal{P}$ si, pour tout vecteur $\vec{p}$ de $\mathcal{P}$, $\vec{n} \cdot \vec{p} = 0$.

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH, les deux vecteurs $\vec{CG}$ et $\vec{DC}$ sont orthogonaux.
Par ailleurs, $\vec{CG}$ est un vecteur normal à (ABC) et $\vec{DC}$ un vecteur normal à (ADE). Ainsi, les plans (ABC) et (ADE) sont perpendiculaires.



1.3 Orthogonalité de deux plans

Définition

Soient deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de l'espace.
On dit que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont orthogonaux si tout vecteur $\vec{u}_1$ de $\mathcal{P}_1$ est orthogonal à tout vecteur $\vec{u}_2$ de $\mathcal{P}_2$.



Propriété

Soient deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de l'espace, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

$$\mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ sont orthogonaux} \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0.$$

Cette dernière propriété sera très utilisée pour démontrer l'orthogonalité de deux plans.

1.4 Équations cartésiennes d'un plan

Propriété

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a alors, pour tout point $M(x; y; z)$ l'espace, $M \in \mathcal{P} \iff ax + by + cz + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Pour tout point M du plan, on a :

.....

Définition

« $ax + by + cz + d = 0$ » est appelée une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Pour un triplet donné $(a; b; c)$, il existe une infinité d'équations cartésiennes car $d \in \mathbb{R}$.

Exemple

Donner de deux façons différentes l'équation cartésienne du plan passant par le point $A(-1; 2; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Méthode n°1 :

Méthode n°2 :



1.5 Détermination d'une représentation paramétrique de l'intersection de 2 plans

Exemple

On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes respectives :

$$\mathcal{P} : 2x + 3y - z + 5 = 0$$

$$\mathcal{P}' : x + y + 1 = 0$$

Nous souhaitons déterminer une représentation paramétrique de l'intersection de ces deux plans si elle existe.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.6 Intersection d'une droite et d'un plan

Exemple

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $5x + y - z + 3 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(0; 1; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. On vérifie d'abord que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en un point.

.....

.....

.....

.....

2. Déterminons les coordonnées de I.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

$$d(\mathbf{A}; \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$
[illegible]