



Vecteurs, droites et plans de l'espace

Cours, méthodes, exemples et démonstrations

1 Vecteur dans l'espace

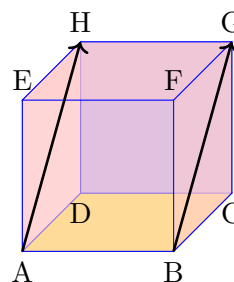
Définition

Soient A et B deux points de l'espace, la transformation qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme s'appelle la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Comme, dans le plan, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont égaux et on dit également qu'ils sont deux représentants d'un vecteur unique noté $\vec{u}$.

Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont égaux car $ABGH$



Propriété

Relation de Chasles : Comme dans le plan, si A , B et C sont trois points de l'espace alors on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Exemple

Dans un triangle ABC , on place les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
Exprimons le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

.....
.....

Définitions

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- On dit que $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existent deux réels λ et μ tels que :

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

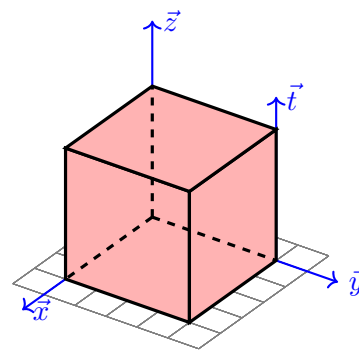
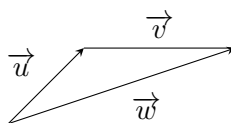
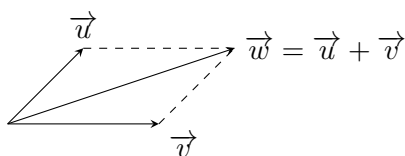
- On dit aussi que les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires**.



- Deux vecteurs de l'espace sont dits **colinéaires** s'ils ont la même direction.
- Dans le cas où $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

Exemples

- $\vec{w}$ est une de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont
- Les trois vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ ne sont pas
- Les trois vecteurs $\vec{y}$, $\vec{z}$ et $\vec{t}$ sont



2 Droite dans l'espace

Définition

Une droite de l'espace est définie :

- soit par de deux points distincts ;
- soit par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul.

2.1 Caractérisation

Propriété

Toute droite $\mathcal{D}$ de l'espace est définie par un point A et un vecteur $\vec{u}$.

On dit que $\vec{u}$ est un *vecteur directeur* de la droite.

$\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.2 Droites parallèles

Définition

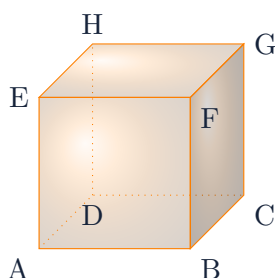
Deux droites de l'espace sont dites **parallèles** si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.

Propriété

Dans l'espace, deux droites parallèles sont nécessairement dans un même plan ; on dit qu'elles sont **coplanaires**.



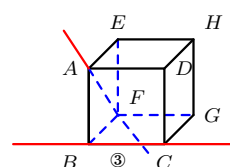
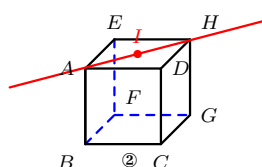
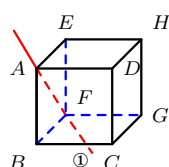
Dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas nécessairement parallèles.



Dans le cube ci-dessus par exemple, les droites (EF) et (BC) ne sont pas parallèles bien qu'elles ne se coupent pas.

Exemples

Position relative d'une droite par rapport à une autre droite dans un espace.



- ①
 ②
 ③

3 Plan dans l'espace

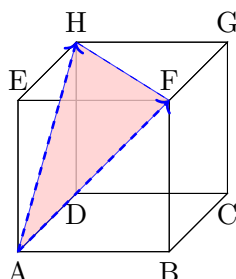
Définition

Un plan de l'espace est défini :

- soit par trois points non alignés (ABC) ;
- soit par un point et deux vecteurs non colinéaires $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$, le plan (AFH) est déterminé





3.1 Caractérisation d'un plan dans l'espace

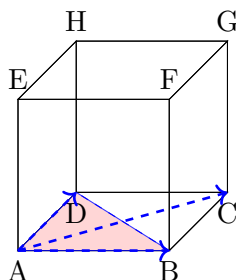
Propriété

Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$ défini par un point A et un couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On dit que le plan est dirigé par le couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH et le plan (ABD), le point C appartient à ce plan car le vecteur $\overrightarrow{AC}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$,



Définition

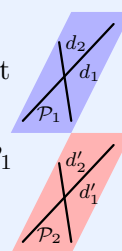
Soit un plan défini par un point A et un couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

- ▶ $(\vec{u}, \vec{v})$ est appelé une *base* du plan.
- ▶ $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé un *repère* du plan.

3.2 Plans parallèles

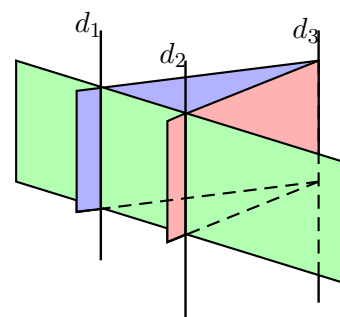
Propriété

- Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.
- Soient deux plans de l'espace $\mathcal{P}_1$, dirigé par $(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$, et $\mathcal{P}_2$, dirigé par $(\vec{u}_2, \vec{v}_2)$. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ d'une part, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ d'autre part, sont colinéaires.



Théorème

Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contiennent respectivement deux droites d_1 et d_2 parallèles entre elles alors leur intersection d_3 est parallèle à ces deux droites.





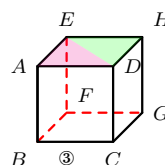
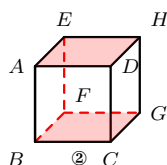
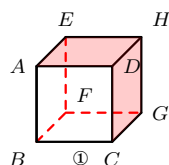
4 Positions relatives de droites et plans

4.1 Positions relatives de deux plans

Propriété

Deux plans de l'espace sont soit sécants (leur intersection est une droite), soit parallèles.

Exemples



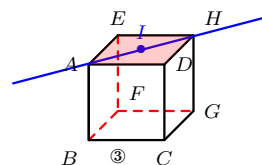
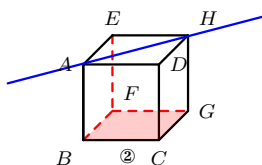
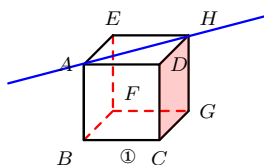
- ①
②
③

4.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

Exemples



- ①
②
③

5 Vecteurs coplanaires et repère de l'espace

5.1 Vecteurs coplanaires

Définitions

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace non deux à deux colinéaires sont dits **coplanaires** si l'un est une combinaison linéaire des deux autres.
- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent une **base** de l'espace si et seulement si chacun de ces trois vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des deux autres.



Si deux des trois vecteurs sont colinéaires alors les trois vecteurs sont nécessairement coplanaires.

5.2 Repère de l'espace

Définition

Un repère de l'espace est défini par un point A et un triplet de 3 vecteurs non coplanaires $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

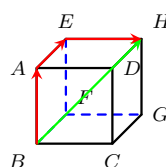
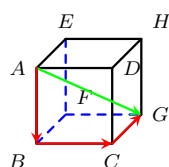
Propriété

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace, il existe un triplet **unique** de réels $(a ; b ; c)$ tel que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.
On dit que $(a ; b ; c)$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Démonstration

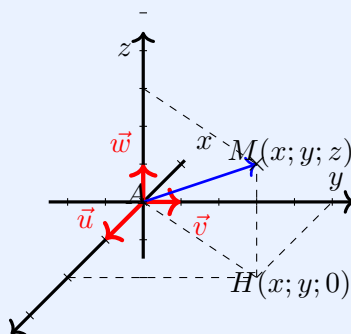
Exemples

Dans le cube ABCDEFGH muni de la base $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on peut décomposer les vecteurs ainsi :



Propriété

Dans le repère $(A ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, pour tout point M de l'espace il existe un triplet unique de réels $(x ; y ; z)$ tel que $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

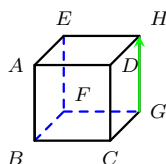




Comme dans un plan, si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Dans le cube ABCDEFGH muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a : $H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi

$$\overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A de coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(a ; b ; c)$.

$$M(x; y; z) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration

This image shows a full page of dot grid paper. It features approximately 20 horizontal rows of small, evenly spaced black dots on a white background. The dots are arranged in straight lines across the width of the page, providing a guide for writing or drawing without solid lines.



Exemple

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 5 + 7t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

passe par le point $A(\cdots; \cdots; \cdots)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \cdots \end{pmatrix}$.

Exemple

$$(d) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = -2 - 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad ; \quad (d') : \begin{cases} x = 4 - 3t' \\ y = 16 - 5t' \\ z = -22 + t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}$$
[illegible]